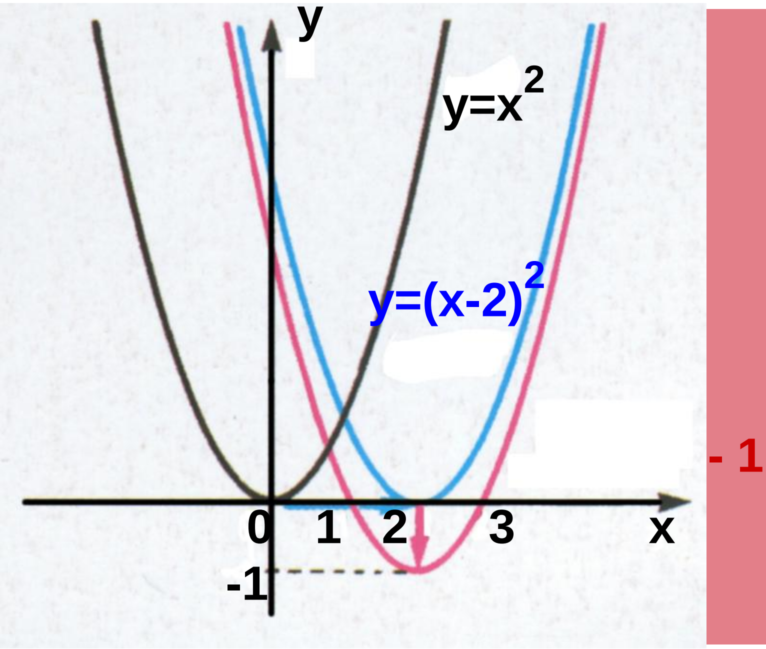
Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α ΣΒΕΡΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ



Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

<u>ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ</u>

Ανδρεαδάκης Στυλιανός Κατσαργύρης Βασίλειος
Παπασταυρίδης Σταύρος Πολύζος Γεώργιος
Σβέρκος Ανδρέας

<u>ΟΜΑΔΑ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ</u>

Ανδρεαδάκης Στυλιανός
Ομότιμος Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Κατσαργύρης Βασίλειος
Καθηγητής Βαρβακείου Πειραματικού Λυκείου
Παπασταυρίδης Σταύρος
Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών
Πολύζος Γεώργιος *Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*
Σβέρκος Ανδρέας
Καθηγητής 2ου Πειραματικού Λυκείου Αθηνών

<u>ΕΠΟΠΤΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΟΥ Π.Ι.</u>

Σκούρας Αθανάσιος *Σύμβουλος του Π.Ι.*
Πολύζος Γεώργιος *Μόνιμος Πάρεδρος του Π.Ι.*

<u>ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΗΣ ΑΝΑΜΟΡΦΩΜΕΝΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ</u>

Ελευθερόπουλος Ιωάννης
Καθηγητής Μαθηματικών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.
Ζώτος Ιωάννης
Καθηγητής Μαθ/κών, Αποσπασμένος στο Π.Ι.
Καλλιπολίτου Ευρυδίκη
Καθηγήτρια Μαθ/κών, Αποσπασμένη στο Π.Ι.

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>

Ομάδα Εργασίας Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Μαθηματικά

Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

Γ΄ Κ.Π.Σ. / ΕΠΕΑΕΚ ΙΙ / Ενέργεια 2.2.1 / Κατηγορία Πράξεων 2.2.1.α: «Αναμόρφωση των προγραμμάτων σπουδών και συγγραφή νέων εκπαιδευτικών πακέτων»

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Δημήτριος Γ. Βλάχος
Ομότιμος Καθηγητής του Α.Π.Θ Πρόεδρος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Πράξη με τίτλο: «Συγγραφή νέων βιβλίων και παραγωγή υποστηρικτικού εκπαιδευτικού υλικού με βάση το ΔΕΠΠΣ και τα ΑΠΣ για το Γυμνάσιο»

Επιστημονικός Υπεύθυνος Έργου
Αντώνιος Σ. Μπομπέτσης
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου

Αναπληρωτής Επιστημ. Υπεύθ. Έργου
Γεώργιος Κ. Παληός
Σύμβουλος του Παιδαγωγ. Ινστιτούτου
Ιγνάτιος Ε. Χατζηευστρατίου
Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγ. Ινστιτ.

Έργο συγχρηματοδοτούμενο 75% από το Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο και 25% από εθνικούς πόρους.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο που κρατάτε στα χέρια σας περιλαμβάνει την ύλη της Άλγεβρας που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Α΄ τάξης του Γενικού Λυκείου.
Το βιβλίο αυτό προήλθε από αναμόρφωση της Α΄ έκδοσης (1990) του βιβλίου ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ, του οποίου τη συγγραφική ομάδα αποτελούσαν οι Ανδρεαδάκης Στυλιανός, Κατσαργύρης Βασίλειος, Παπασταυρίδης Σταύρος, Πολύζος Γεώργιος, Σβέρκος Ανδρέας, ενώ, την ομάδα κριτών αποτελούσαν οι Αχτσαλωτίδης Χριστόφορος, Δικαιάκου- Μαυρουδαία Καλλιόπη, Καλομητσίνης Σπύρος, Κουζέλης Ανδρέας και Παντελίδης Γεώργιος.
Στην αναμόρφωση του βιβλίου, που έγινε από την ίδια συγγραφική ομάδα με απόφαση και εποπτεία του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου, ελήφθησαν υπόψη:

- **Οι οδηγίες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου για τη διδασκαλία της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, οι οποίες αναφέρονταν στην αναδιάταξη των περιεχομένων και στη διδακτική μεθοδολογία.**
- **Τα νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών και τα νέα διδακτικά βιβλία των Μαθηματικών του Γυμνασίου και**
- **Ο τρόπος αξιολόγησης των μαθητών Λυκείου στα Μαθηματικά, όπως αυτός ορίζεται από το Π. Δ 60/2006.**

Κρίθηκε αναγκαίο να προηγηθεί της διδακτέας ύλης του βιβλίου ένα εισαγωγικό κεφάλαιο με τα απολύτως απαραίτητα στοιχεία από τη μαθηματική λογική και τη θεωρία συνόλων, τα οποία θεωρούνται χρήσιμα για τη σαφέστερη διατύπωση των μαθηματικών εννοιών, των προτάσεων κτλ. Τα στοιχεία αυτά, που ήταν διάσπαρτα στην Α΄ έκδοση του βιβλίου, παρουσιάζονται στην αναμορφωμένη έκδοση με οργανωμένο τρόπο.

Το περιεχόμενο του βιβλίου, που αποτελεί και την διδακτέα ύλη της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, έχει σε γενικές γραμμές έχει ως εξής:

1. **Στο 1ο Κεφάλαιο επαναλαμβάνονται, συμπληρώνονται και επεκτείνονται τα βασικά στοιχεία του αλγεβρικού λογισμού που διδάχτηκαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο.**
2. **Στο 2ο Κεφάλαιο επαναλαμβάνονται και εξετάζονται συστηματικότερα όσα ήταν γνωστά από το Γυμνάσιο για τις εξισώσεις 1ου βαθμού, τις εξισώσεις 2ου βαθμού, καθώς και για εξισώσεις που η επίλυσή τους ανάγεται σε εξισώσεις 1 ου και 2ου βαθμού.**
3. **Στο 3ο Κεφάλαιο παρουσιάζεται η επίλυση ανισώσεων 1ου και 2ου βαθμού, καθώς και ανισώσεων που η επίλυσή τους ανάγεται σε ανισώσεις 1ου και 2ου βαθμού.**

Με τη διδασκαλία των τριών πρώτων κεφαλαίων ολοκληρώνεται ο αλγεβρικός λογισμός στο βαθμό που είναι απαραίτητος όχι μόνο για την απρόσκοπτη συνέχεια της διδασκαλίας Άλγεβρας, αλλά και για την εξυπηρέτηση των συναφών μαθημάτων.

4. **Το 4ο Κεφάλαιο αναφέρεται στις συναρτήσεις. Η συνάρτηση είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες των Μαθηματικών, η οποία είναι το εργαλείο έκφρασης ενός μεγάλου φάσματος φαινομένων της φύσης και της κοινωνίας. Η έννοια της συνάρτησης θα είναι αντικείμενο συστηματικής μελέτης και εμβάθυνσης σε όλο το Λύκειο.**
5. **Στο 5ο Κεφάλαιο γίνεται κατ’ αρχήν η μελέτη των συναρτήσεων $y = αx^2$ και $y = \frac{α}{x}$ και ακολουθεί η μελέτη της συνάρτησης τριώνυμο $y = αx^2 + βx + γ$, που αποτελεί τον κεντρικό στόχο του κεφαλαίου αυτού.**

6. Στο **6ο Κεφάλαιο** κατ' αρχήν επαναλαμβάνονται και συμπληρώνονται όσα διδάχτηκαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο για γραμμικά συστήματα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους και στη συνέχεια επιλύονται γραμμικά συστήματα με τρεις αγνώστους, καθώς και μη γραμμικά συστήματα. Για την παρουσίαση των εννοιών του κεφαλαίου αυτού χρησιμοποιήθηκαν αναπαραστάσεις από τα κεφάλαια των συναρτήσεων.
7. Στο **7ο Κεφάλαιο**, που είναι και το τελευταίο του βιβλίου, επαναλαμβάνονται και επεκτείνονται οι γνωστές από το Γυμνάσιο έννοιες των τριγωνομετρικών αριθμών και των τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και παρουσιάζεται η αναγωγή του υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών στο 1ο τεταρτημόριο.

Εκτιμούμε ότι η παρούσα αναμορφωμένη έκδοση του βιβλίου θα συμβάλει στην αναβάθμιση της διδασκαλίας της Άλγεβρας στο Λύκειο. Ωστόσο, για περαιτέρω βελτίωση του βιβλίου, οποιοσδήποτε μαθητής, καθηγητής ή ενδιαφερόμενος για την παιδεία στον τόπο μας θέλει να κάνει σχόλια, παρατηρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο αυτό, παρακαλείται να τις στείλει στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310 Αγία Παρασκευή.

Δεκέμβριος 2009
Οι Συγγραφείς

Ε.1 ΤΟ ΛΕΞΙΛΟΓΙΟ ΤΗΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

Στη παράγραφο αυτή θα γνωρίσουμε μερικές βασικές έννοιες της Λογικής, τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο, για τη σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε αναφέρονται σε έννοιες και ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο.

Η συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και β . Είναι γνωστό ότι:

Αν οι αριθμοί α και β είναι ίσοι, τότε και τα τετράγωνα τους θα είναι ίσα.

Αυτό σημαίνει ότι:

Αν ο ισχυρισμός « $\alpha = \beta$ » είναι αληθής, τότε και ο ισχυρισμός « $\alpha^2 = \beta^2$ » θα είναι αληθής.

Γι' αυτό λέμε ότι ο ισχυρισμός « $\alpha^2 = \beta^2$ » <u>συνεπάγεται</u> τον ισχυρισμό « $\alpha = \beta$ » και γράφουμε: $\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$.

Γενικά:

> P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P να αληθεύει και ο Q , τότε λέμε ότι **ο P συνεπάγεται τον Q** και γράφουμε $P \Rightarrow Q$.

Ο ισχυρισμός « **$P \Rightarrow Q$** » λέγεται **συνεπαγωγή** και πολλές φορές διαβάζεται «**αν P, τότε Q**». Ο P λέγεται

υπόθεση της συνεπαγωγής, ενώ ο Q λέγεται **συμπέρασμα** αυτής[1].

Η ισοδυναμία ή διπλή συνεπαγωγή

Ας θεωρήσουμε τις γνωστές μας από το Γυμνάσιο συνεπαγωγές:

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2 \qquad (1)$$

και

$$\alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \qquad (2),$$

που ισχύουν για όλους τους πραγματικούς α, β και γ. Παρατηρούμε ότι:

- ✓ **Για την πρώτη συνεπαγωγή, δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αφού για παράδειγμα είναι $(-3)^2 = 3^2$, ενώ $-3 \neq 3$.**
- ✓ **Για τη δεύτερη, όμως, συνεπαγωγή ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή για όλους τους πραγματικούς**

---

(1) Στην καθημερινή πράξη, συνήθως, δεν χρησιμοποιούμε συνεπαγωγές με ψευδή υπόθεση. Αλλά και η μαθηματική επιστήμη δεν έχει ανάγκη τέτοιου είδους συνεπαγωγών. Όμως, για τεχνικούς λόγους που συνδέονται με την ευκολία της έκφρασης μαθηματικών ζητημάτων, θα υιοθετήσουμε τη σύμβαση ότι η συνεπαγωγή « $P \Rightarrow Q$ » να είναι αληθής και στην περίπτωση που η υπόθεση P είναι ψευδής. Έτσι, η συνεπαγωγή « $P \Rightarrow Q$ » είναι ψευδής, μόνο όταν η υπόθεση P είναι αληθής και το συμπέρασμα Q είναι ψευδές και αληθής σε κάθε άλλη περίπτωση. Εκ πρώτης όψεως η σύμβαση αυτή φαίνεται περίεργη, αλλά στο πλαίσιο του παρόντος βιβλίου δεν μπορούν να εξηγηθούν οι λόγοι που οδήγησαν σε αυτή.

αριθμούς α, β, γ ισχύει και η συνεπαγωγή:

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta$$

Γι' αυτό λέμε ότι οι δύο ισχυρισμοί είναι <u>ισοδύναμοι</u> και γράφουμε:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma \,.$$

Γενικά:

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τέτοιοι ώστε, όταν αληθεύει ο P, να αληθεύει και ο Q και όταν αληθεύει ο Q, να αληθεύει και ο P, τότε λέμε ότι ο **P συνεπάγεται τον Q και αντιστρόφως** ή, αλλιώς, ότι **ο P είναι ισοδύναμος με τον Q** και γράφουμε **P** $\Leftrightarrow$ **Q** .

Ο ισχυρισμός « **P** $\Leftrightarrow$ **Q** » λέγεται **ισοδυναμία** και αρκετές φορές διαβάζεται «**P αν και μόνο αν Q**».

Ο σύνδεσμος «ή»

Γνωρίζουμε ότι:

Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς α και β είναι ίσος με το μηδέν.

Για να δηλώσουμε ότι ένας τουλάχιστον από τους α και β είναι ίσος με το μηδέν, γράφουμε α = 0 ή β = 0 . Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Γενικά:

> Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός **P ή Q** αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>ένας τουλάχιστον</u> από τους δύο ισχυρισμούς αληθεύει.

Ο ισχυρισμός «**P ή Q**» λέγεται **διάζευξη** των P και Q .
Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(x^2 - x)(x^2 -1) = 0$$

αληθεύει, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες x^2 - x και x^2 - 1 είναι ίσος με το μηδέν, δηλαδή, αν και μόνο αν ισχύει η διάζευξη:

$$x^2 - x = 0 \text{ ή } x^2 - 1 = 0.$$

Παρατηρούμε εδώ ότι:

- ✓ **Για x = 1 αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, ενώ**
- ✓ **Για x = 0 αληθεύει μόνο η πρώτη και για x = -1 αληθεύει μόνο η δεύτερη.**

Ο σύνδεσμος «και»

Γνωρίζουμε ότι:

«Το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών α και β είναι διάφορο του μηδενός, αν και μόνον αν και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός».

Για να δηλώσουμε ότι και οι δύο αριθμοί α και β είναι διάφοροι του μηδενός γράφουμε

$$\alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Έτσι, έχουμε την ισοδυναμία

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

Γενικά:

Αν P και Q είναι δύο ισχυρισμοί, τότε ο ισχυρισμός P και Q αληθεύει μόνο στην περίπτωση που <u>και οι δύο</u> ισχυρισμοί αληθεύουν.

Ο ισχυρισμός «P και Q» λέγεται σύζευξη των P και Q . Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός

$$x(x -1) = 0 \text{ και } (x -1)(x +1) = 0$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία αληθεύουν και οι δύο εξισώσεις, δηλαδή για x = 1 .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1. $\alpha^2 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$	Α	Ψ
2. $\alpha^2 = \alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$	Α	Ψ
3. $\alpha^2 \neq \alpha \Rightarrow \alpha \neq 1$	Α	Ψ
4. $\alpha \neq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 \neq 4$	Α	Ψ
5. $\alpha > 2 \Rightarrow \alpha^2 > 4$	Α	Ψ
6. $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha^2 < 4$	Α	Ψ
7. $\alpha^2 < 4 \Rightarrow \alpha < 2$	Α	Ψ
8. $\alpha^2 > 4 \Rightarrow \alpha > 2$	Α	Ψ
9. $\alpha < 2$ και $\beta < 3 \Rightarrow \alpha \cdot \beta < 6$	Α	Ψ

ΙΙ. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τους ισχυρισμούς της ομάδας Α' με τον ισοδύναμό του ισχυρισμό από τη ομάδα Β'.

Α΄ ΟΜΑΔΑ	
1	$x(x - 2) = 0$
2	$x(x - 2) \neq 0$
3	$x^2 = 4$
4	$x^2 = 4$ και $x < 0$
5	$x(x- 2) = 0$ και $x(x-1) = 0$
6	$x^2 = 4$ και $x > 0$

Β΄ ΟΜΑΔΑ	
Α	$x \neq 0$ και $x \neq 2$
Β	$x = 2$
Γ	$x = -2$ ή $x = 2$
Δ	$x = 0$
Ε	$x = 0$ ή $x = 2$
Ζ	$x = -2$

Ε.2 ΣΥΝΟΛΑ

Η έννοια του συνόλου

Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ.
Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π. χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.
Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά σύνολα. Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor:

> **Σύνολο** είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου.

ΣΧΟΛΙΟ
Ένα σύνολο πρέπει να είναι, όπως συνηθίζουμε να λέμε, «καλώς ορισμένο». Αυτό σημαίνει ότι τα στοιχεία του μπορούν να αναγνωρίζονται με σιγουριά. Για παράδειγμα δεν μπορούμε να μιλάμε για το σύνολο των μεγάλων πραγματικών αριθμών. Αυτό δεν είναι σύνολο, με τη μαθηματική έννοια του όρου, διότι δεν

υπάρχει κανόνας που να καθορίζει αν ένας πραγματικός αριθμός είναι ή δεν είναι μεγάλος. Αν όμως θεωρήσουμε τους πραγματικούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 1000000, τότε αυτοί αποτελούν σύνολο.

Για να συμβολίσουμε ένα σύνολο στα Μαθηματικά, χρησιμοποιούμε ένα από τα κεφαλαία γράμματα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφαβήτου, ενώ για τα στοιχεία του χρησιμοποιούμε τα μικρά γράμματα αυτών. Για παράδειγμα:

- ✓ **με N συμβολίζουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών,**
- ✓ **με Z το σύνολο των ακεραίων αριθμών,**
- ✓ **με Q το σύνολο των ρητών αριθμών και**
- ✓ **με R το σύνολο των πραγματικών αριθμών.**

Τα σύμβολα $\in$ και $\notin$

Για να δηλώσουμε ότι το x είναι στοιχείο του συνόλου A, γράφουμε $x \in A$ και διαβάζουμε «το x ανήκει στο A», ενώ για να δηλώσουμε ότι το x δεν είναι στοιχείο του συνόλου A γράφουμε $x \notin A$ και διαβάζουμε «το x δεν ανήκει στο A». Για παράδειγμα

$$\frac{3}{5} \in N, \ \frac{3}{5} \in Q, \ -2 \in Z, \ \sqrt{2} \in Q, \sqrt{2} \in R \quad \text{κτλ.}$$

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους:
α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντας τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο A έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του».

β) Αν από το σύνολο των πραγματικών αριθμών επιλέξουμε εκείνους που έχουν την ιδιότητα να είναι θετικοί, τότε φτιάχνουμε το σύνολο των θετικών πραγματικών αριθμών, το οποίο συμβολίζεται με:

$\{x \in R \mid x > 0\}$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in R$, όπου $x > 0$». Ομοίως το σύνολο των άρτιων ακεραίων συμβολίζεται

$$\{x \in Z \mid x \text{ άρτιος}\}$$

Γενικά, αν από ένα σύνολο Ω επιλέγουμε εκείνα τα στοιχεία του, που έχουν μια ορισμένη ιδιότητα Ι, τότε φτιάχνουμε ένα νέο σύνολο που συμβολίζεται με:

$$\{x \in \Omega \mid x \text{ έχει την ιδιότητα } I\}$$

και διαβάζεται «Το σύνολο των $x \in D$, όπου x έχει την ιδιότητα Ι». Ο παραπάνω τρόπος παράστασης ενός συνόλου λέγεται «παράσταση του συνόλου με περιγραφή των στοιχείων του».

Ίσα σύνολα

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σύνολα:

$A = \{1, 2\}$ και $B = \{x \in R \mid (x - 1)(x - 2) = 0\}$

Επειδή οι λύσεις της εξίσωσης $(x - 1)(x - 2) = 0$ είναι οι αριθμοί 1 και 2, το σύνολο B έχει τα ίδια ακριβώς στοιχεία με το A. Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι τα σύνολα A και B είναι ίσα.

Γενικά:

> Δύο σύνολα A και B λέγονται **ίσα**, όταν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία.

Με άλλα λόγια:

«Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και αντιστρόφως κάθε στοιχείο του B είναι και στοιχείο του A».

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A = B$.

Υποσύνολα συνόλου

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα

$A=\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ και $B=\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$

Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του συνόλου A είναι και στοιχείο του συνόλου B. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το A είναι υποσύνολο του B.

Γενικά:

> Ένα σύνολο A λέγεται **υποσύνολο** ενός συνόλου B, όταν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B.

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε $A \subseteq B$. Άμεσες συνέπειες του ορισμού είναι οι:

i) $A \subseteq A$, για κάθε σύνολο A.

ii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$, τότε $A \subseteq \Gamma$.

iii) Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε A = B .

Το κενό σύνολο

Ας αναζητήσουμε τα στοιχεία του συνόλου $A = \{x \in R \mid x^2 = -1$. Είναι φανερό ότι τέτοια στοιχεία δεν υπάρχουν, αφού η εξίσωση $x^2 = -1$ είναι αδύνατη στο R. Το σύνολο αυτό, που δεν έχει κανένα στοιχείο, λέγεται **κενό σύνολο** και συμβολίζεται με Ø ή { }.

Δηλαδή:

Κενό σύνολο είναι το σύνολο που δεν έχει στοιχεία.

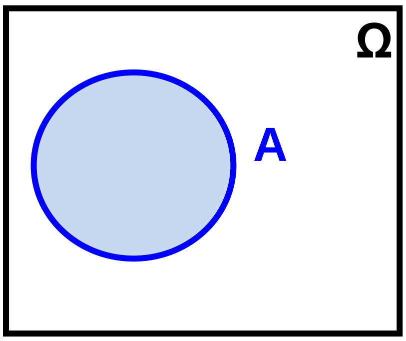
Δεχόμαστε ότι το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Διαγράμματα Venn

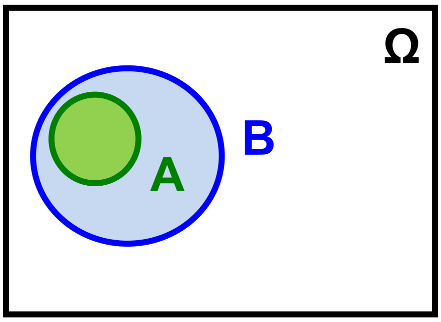
Μια εποπτική παρουσίαση των συνόλων και των μεταξύ τους σχέσεων γίνεται με τα διαγράμματα Venn.

- Κάθε φορά που εργαζόμαστε με σύνολα, τα σύνολα αυτά θεωρούνται υποσύνολα ενός συνόλου που λέγεται **βασικό σύνολο** και συμβολίζεται με Ω. Για παράδειγμα, τα σύνολα R, Z και Q, είναι υποσύνολα του βασικού συνόλου Ω = R.

  Το βασικό σύνολο συμβολίζεται με το εσωτερικό ενός ορθογωνίου, ενώ κάθε υποσύνολο ενός βασικού συνόλου παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό του ορθογωνίου.



- Αν $A \subseteq B$, τότε το Α παριστάνεται με το εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης που περιέχεται στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης που παριστάνει το Β.



Πράξεις με σύνολα

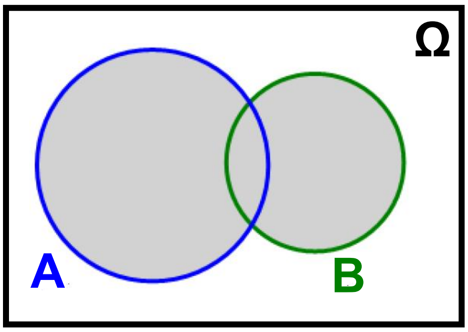
Έστω Ω = {1, 2, 3, ...,10} ένα βασικό σύνολο και δύο υποσύνολά του:

A = {1, 2, 3, 4}   και   B = {3, 4, 5, 6} .

- Το σύνολο {1, 2, 3, 4, 5, 6}, που έχει ως στοιχεία τα κοινά και τα μη κοινά στοιχεία των Α και Β, δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα Α και Β λέγεται <u>ένωση</u> των συνόλων Α και Β.

Γενικά:

Ένωση δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν τουλάχιστον σε ένα από τα σύνολα Α και Β και συμβολίζεται με **Α U B .**



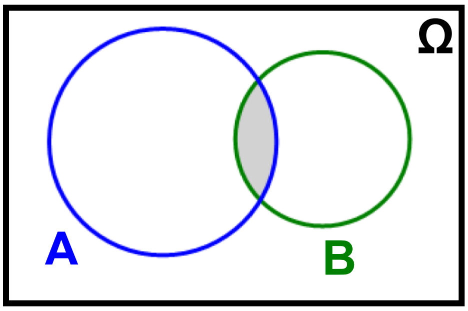
Δηλαδή είναι:

$$A \cup B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

- Το σύνολο {3, 4} που έχει ως στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των Α και Β λέγεται τομή των Α και Β.

Γενικά:

Τομή δύο υποσυνόλων Α, Β ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που ανήκουν και στα δύο σύνολα Α, Β και συμβολίζεται με **Α ∩ Β**



Δηλαδή είναι:

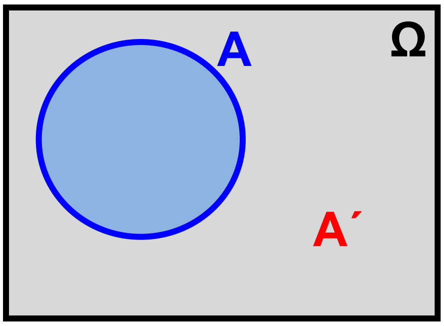
$$A \cap B = \{x \in \Omega \mid x \in A \text{ και } x \in B\}$$

Στην περίπτωση που δύο σύνολα Α και Β δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν $A \cap B = \varnothing$, τα δύο σύνολα λέγονται ξένα μεταξύ τους.

- **Το σύνολο {5, 6, 7, 8, 9, 10} που έχει ως στοιχεία τα στοιχεία του Ω που δεν ανήκουν στο Α, λέγεται <u>συμπλήρωμα</u> του συνόλου Α.**

Γενικά:

Συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου Α ενός βασικού συνόλου Ω λέγεται το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α και συμβολίζεται με **Α΄**.



Δηλαδή είναι:

$$A' = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. 1. **Στους παρακάτω πίνακες να συμπληρώσετε με το σύμβολο "✓" εκείνα τα τετραγωνάκια των οποίων ο αντίστοιχος αριθμός ανήκει στο αντίστοιχο σύνολο.**

2. **Πώς ονομάζονται οι αριθμοί για τους οποίους έχουν συμπληρωθεί τα τετραγωνάκια μόνο της τελευταίας γραμμής;**

3. **Να χρησιμοποιήσετε τα διαγράμματα του Venn για να παραστήσετε τις διαδοχικές σχέσεις εγκλεισμού των συνόλων N, Z, Q και R και να τοποθετήσετε μέσα σε αυτά τους αριθμούς αυτούς.**

	$\in$ N	$\in$ Z	$\in$ Q	$\in$ R
-3,5				
0				
$\sqrt{10}$				
$-\frac{13}{5}$				
π				
2,3				
$\frac{20}{5}$				
$\sqrt{100}$				
-5				

II. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Αν Α= {x ∈N |x διαιρέτης του 16} και Β= {x ∈N |x διαιρέτης του 24} , τότε:

   α) Α U Β ………………… β) Α ∩ Β ……………………

2. Ας θεωρήσουμε ως βασικό σύνολο το σύνολο Ω των γραμμάτων του ελληνικού αλφαβήτου και τα υποσύνολά του
   Α= {x∈Ω| x φωνήεν} και Β= {x∈Ω| x σύμφωνο}.

   Τότε:
   α) Α U Β = ……… β) Α ∩ Β = ……..
   γ) Α΄ = …….. δ) Β΄ = ……..

III. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να βάλετε σε κύκλο τις σωστές απαντήσεις.

1. Έστω δύο σύνολα Α και Β. Τότε:
   α) Α⊆ Α ∩ Β **β)** Β⊆ Α ∩ Β
   γ) Α ∩ Β ⊆Α **δ)** Α ∩ Β⊆ Β

2. Έστω δύο σύνολα Α και Β . Τότε:
   α) Α⊆ Α U Β **β)** Α U Β⊆ Β
   γ) Α U Β ⊆ Α **δ)** Α U Β ⊆Β

IV. Σε καθεμιά από τις παρακάτω ερωτήσεις να συμπληρώσετε τις ισότητες.

1. Έστω Ω ένα βασικό σύνολο, Ø το κενό σύνολο και Α ⊆ Ω .Τότε:
   α) Ø΄ = …… **β)** Ω΄ = …… **γ)** (Α΄)΄ =…..

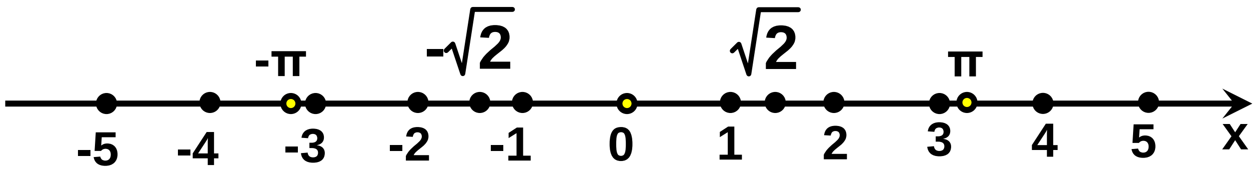
2. Έστω Α ⊆ Β .Τότε
   α) Α ∩ Β = …… **β)** Α U Β = …….

1 ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
(Επαναλήψεις - Συμπληρώσεις)

Εισαγωγή

Στο Γυμνάσιο μάθαμε ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς και παριστάνονται με τα σημεία ενός άξονα, του άξονα των πραγματικών αριθμών.



Θυμίζουμε ότι:

✓ **Κάθε ρητός αριθμός έχει (ή μπορεί να πάρει) κλασματική μορφή, δηλαδή τη μορφή $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με $β \neq 0$.**

✓ **Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να γραφεί ως δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός και, αντιστρόφως, κάθε δεκαδικός ή περιοδικός δεκαδικός μπορεί να πάρει κλασματική μορφή. Για παράδειγμα,**

$$\frac{14}{5} = 2{,}8, \qquad -\frac{9}{8} = -1{,}25, \qquad \frac{60}{11} = 5{,}\overline{45},$$

$$2{,}25 = \frac{225}{100} \quad \text{και} \quad 2{,}\overline{32} = \frac{230}{99}$$

Μπορούμε δηλαδή να πούμε ότι οι ρητοί αριθμοί αποτελούνται από τους δεκαδικούς και τους περιοδικούς δεκαδικούς αριθμούς.

Υπάρχουν όμως και αριθμοί, όπως οι $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, κτλ., που δεν μπορούν να πάρουν τη μορφή $\frac{α}{β}$, όπου α, β ακέραιοι, με β ≠ 0 (ή, με άλλα λόγια, δεν μπορούν να γραφούν ούτε ως δεκαδικοί ούτε ως περιοδικοί δεκαδικοί). Οι αριθμοί αυτοί λέγονται άρρητοι αριθμοί.

Πράξεις

Στους πραγματικούς αριθμούς ορίστηκαν οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και, με τη βοήθειά τους, η αφαίρεση και η διαίρεση.

● Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες που αναφέρονται στον επόμενο πίνακα, οι οποίες και αποτελούν τη βάση του αλγεβρικού λογισμού.

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$α + β =$ $= β + α$	$αβ = βα$
Προσεταιριστική	$α + (β + γ) =$ $= (α + β) + γ$	$α(βγ) = (αβ)γ$
Ουδέτερο Στοιχείο	$α + 0 = α$	$α \cdot 1 = α$
Αντίθετος/ Αντί-στροφος Αριθμού	$α + (-α) = 0$	$α \cdot \frac{1}{α} = 1, α \neq 0$
Επιμεριστική	$α(β + γ) = αβ + αγ$	

Στον πίνακα αυτόν, αλλά και στη συνέχεια του βιβλίου, τα γράμματα που χρησιμοποιούνται παριστά-νουν <u>οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς</u>, εκτός αν δηλώνεται διαφορετικά.

Ο αριθμός 0 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, διότι προστιθέμενος σε οποιονδήποτε

αριθμό δεν τον μεταβάλλει. Επίσης ο αριθμός 1 λέγεται και ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, διότι οποιοσδήποτε αριθμός πολλαπλασιαζόμενος με αυτόν δεν μεταβάλλεται.

ΣΧΟΛΙΟ

Η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης έχουν ως συνέπεια, κάθε άθροισμα με περισσότερους από δυο προσθετέους, να ισούται με οποιοδήποτε άλλο άθροισμα που σχηματίζεται από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$-3 + 2 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} + 5 - 2 = -3 + 3 + 2 - 2 + 5 + \sqrt{2} - \sqrt{2} = 5.$$

Ομοίως, ένα γινόμενο με περισσότερους από δυο παράγοντες ισούται με οποιοδήποτε άλλο γινόμενο που μπορεί να σχηματισθεί από τους ίδιους αριθμούς με οποιαδήποτε σειρά και αν τους πάρουμε. Για παράδειγμα,

$$(-3)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-6)4\left(-\frac{5}{2}\right) = (-3)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)(-6)4 = -24$$

(Η απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών είναι αρκετά πολύπλοκη και παραλείπεται).

• Η αφαίρεση και η διαίρεση ορίζονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως ως εξής:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) \quad \text{και} \quad \alpha : \beta = \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

Δηλαδή:

Για να βρούμε τη διαφορά $\alpha - \beta$, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου, ενώ για να βρούμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, με $\beta \neq 0$, πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Επειδή διαίρεση με διαιρέτη το μηδέν δεν ορίζεται, όπου στο εξής συναντάμε το πηλίκο $\frac{\alpha}{\beta}$, εννοείται ότι $\beta \neq 0$ και δεν θα τονίζεται ιδιαίτερα.

• Για τις τέσσερις πράξεις και την ισότητα ισχύουν και οι ακόλουθες ιδιότητες που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο:

1.

$$(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \qquad \alpha + \gamma = \beta + \delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις προσθέσουμε κατά μέλη.

2.

$$(\alpha = \beta \text{ και } \gamma = \delta) \Longrightarrow \alpha\gamma = \beta\delta$$

δηλαδή, δυο ισότητες μπορούμε να τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη.

3.

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και στα δυο μέλη μιας ισότητας να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό.

4.

$$\text{Αν } \gamma \neq 0, \text{ τότε: } \alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha\gamma = \beta\gamma$$

δηλαδή, μπορούμε και τα δυο μέλη μιας ισότητας να τα πολλαπλασιάσουμε ή να τα διαιρέσουμε με τον ίδιο μη μηδενικό αριθμό.

5.

$$\alpha \cdot \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

δηλαδή, το γινόμενο δύο πραγματικών αριθμών είναι ίσο με το μηδέν, αν και μόνο αν ένας τουλάχιστον από τους αριθμούς είναι ίσος με το μηδέν.
Άμεση συνέπεια της ιδιότητας αυτής είναι η ακόλουθη:

$$\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ και } \beta \neq 0$$

ΣΧΟΛΙΟ
Όταν από την ισότητα $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$ ή από την ισότητα $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ μεταβαίνουμε στην ισότητα $\alpha = \beta$, τότε λέμε ότι διαγράφουμε τον ίδιο προσθετέο ή τον ίδιο παράγοντα αντιστοίχως. Όμως στην περίπτωση που διαγράφουμε τον ίδιο παράγοντα πρέπει να ελέγχουμε μήπως ο παράγοντας αυτός είναι ίσος με μηδέν, οπότε ενδέχεται να οδηγηθούμε σε λάθος, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο παράδειγμα.
Έστω $\alpha = 1$. Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 \\ \alpha \cdot \alpha &= \alpha \cdot 1 \\ \alpha^2 &= \alpha \\ \alpha^2 - 1 &= \alpha - 1 \\ (\alpha + 1)(\alpha - 1) &= (\alpha - 1) \cdot 1 \\ \alpha + 1 &= 1 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Όμως έχουμε και $\alpha = 1$, οπότε το 1 θα είναι ίσο με το 0. Οδηγηθήκαμε στο λανθασμένο αυτό συμπέρασμα, διότι στην ισότητα $(\alpha + 1)(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot 1$ διαγράψαμε τον παράγοντα $(\alpha - 1)$ ο οποίος, λόγω της υπόθεσης, ήταν ίσος με μηδέν.

Δυνάμεις

Είναι γνωστή από το Γυμνάσιο η έννοια της δύναμης αριθμού με εκθέτη ακέραιο. Συγκεκριμένα, αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός, έχουμε ορίσει ότι:

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha - \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}, \qquad \text{για } \nu > 1 \text{ και}$$

$$\alpha^1 = \alpha, \qquad \text{για } \nu = 1.$$

Αν επιπλέον είναι $\alpha \neq 0$, τότε ορίσαμε ότι:

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Ενώ είναι φανερό ότι, αν $\alpha = \beta$, τότε $\alpha^\nu = \beta^\nu$, δεν ισχύει το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα είναι $(-2)^2 = 2^2$, αλλά $-2 \neq 2$.

Στον επόμενο πίνακα συνοψίζονται οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο, με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται.

$$\alpha^\kappa \cdot \alpha^\lambda = \alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^\kappa}{\alpha^\lambda} = \alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^\kappa \cdot \beta^\kappa = (\alpha\beta)^\kappa \qquad \frac{\alpha^\kappa}{\beta^\kappa} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\kappa$$

$$(\alpha^\kappa)^\lambda = \alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Η έννοια της ταυτότητας είναι γνωστή από το Γυμνάσιο. Συγκεκριμένα, κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται ταυτότητα.

Στον πίνακα που ακολουθεί αναφέρονται οι γνωστές μας πιο αξιοσημείωτες ταυτότητες:

$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$
$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta)$
$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$
$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$
$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

Μέθοδοι απόδειξης

1η) Ευθεία Απόδειξη

Έστω ότι για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β και γ ισχύει η συνθήκη $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$, δηλαδή έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή:

«Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, τότε $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$».

Επειδή $\alpha + \beta + \gamma = 0$, είναι $\alpha = -(\beta + \gamma)$, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= [-(\beta + \gamma)]^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= -(\beta + \gamma)^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= -\beta^3 - 3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 - \gamma^3 + \beta^3 + \gamma^3 \\
&= -3\beta^2\gamma - 3\beta\gamma^2 \\
&= -3\beta\gamma(\beta + \gamma) \\
&= 3\alpha\beta\gamma, \qquad \text{(αφού } \beta + \gamma = -\alpha).
\end{aligned}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω συνεπαγωγής ξεκινήσαμε με την υπόθεση $\alpha + \beta + \gamma = 0$ και με διαδοχικά βήματα καταλήξαμε στο συμπέρασμα $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται ευθεία απόδειξη.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο) **Ευθεία απόδειξη χρησιμοποιήσαμε και στο Γυμνάσιο για την απόδειξη των γνωστών μας ταυτοτήτων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, με $\alpha, \beta \in R$, έχουμε διαδοχικά:**

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta)^2 &= (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) && \text{[Ορισμός δύναμης]}\\ &= \alpha(\alpha + \beta) + \beta(\alpha + \beta) && \text{[Επιμεριστική ιδιότητα]}\\ &= \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 && \text{[Επιμεριστική ιδιότητα]}\\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 && \text{[Αναγωγή όμοιων όρων]}\end{aligned}$$

2ο) **Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής, μερικές φορές με διαδοχικούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε σε έναν λογικά ισοδύναμο ισχυρισμό που είναι αληθής. Έτσι συμπεραίνουμε ότι και ο αρχικός ισχυρισμός είναι αληθής.**

Για παράδειγμα, έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x, y θέλουμε να αποδείξουμε την ταυτότητα:

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (y - \beta x)^2$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}&(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2\\ \Leftrightarrow\ &\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 =\\ &= \alpha^2x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2y^2 + \alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2\\ \Leftrightarrow\ &\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 = \alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2,\end{aligned}$$

που ισχύει.

3ο) Για να αποδείξουμε ότι ένας ισχυρισμός **δεν είναι πάντα αληθής**, αρκεί να βρούμε ένα παράδειγμα για το οποίο ο συγκεκριμένος ισχυρισμός δεν ισχύει ή, όπως λέμε, αρκεί να βρούμε ένα **αντιπαράδειγμα**. Έτσι ο ισχυρισμός

«για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha^2 > \alpha$»

δεν είναι αληθής, αφού για $\alpha = \frac{1}{2}$ έχουμε $\alpha^2 = \frac{1}{4}$, δηλαδή $\alpha^2 < \alpha$.

<u>2η) Μέθοδος της Απαγωγής σε Άτοπο</u>

Έστω ότι θέλουμε να αποδείξουμε τον ισχυρισμό: «Αν το τετράγωνο ενός ακεραίου αριθμού είναι άρτιος, τότε και ο αριθμός αυτός είναι άρτιος», δηλαδή

«Αν ο α^2 είναι άρτιος αριθμός, τότε και ο α είναι άρτιος αριθμός»

Για την απόδειξη του ισχυρισμού αυτού σκεπτόμαστε ως εξής:

Έστω ότι ο α δεν είναι άρτιος. Τότε ο α θα είναι περιττός, δηλαδή θα έχει τη μορφή α = 2κ + 1, όπου κ ακέραιος, οπότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= (2\kappa + 1)^2\\ &= 4\kappa^2 + 4\kappa + 1\\ &= 2(2\kappa^2 + 2\kappa) + 1\\ &= 2\lambda + 1 \qquad \text{(όπου } \lambda = 2\kappa^2 + 2\kappa).\end{aligned}$$

Δηλαδή $\alpha^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda \in Z$, που σημαίνει ότι ο α^2 είναι περιττός. Αυτό όμως έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ότι ο α^2 είναι άρτιος. Επομένως, η παραδοχή ότι α δεν είναι άρτιος είναι λανθασμένη. Άρα ο α είναι άρτιος.

Στην παραπάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις φθάσαμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει. Οδηγηθήκαμε όπως λέμε σε άτοπο.

Η μέθοδος αυτή απόδειξης χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Αρχαίους Έλληνες και λέγεται απαγωγή σε άτοπο.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθούν οι εξής ιδιότητες των αναλογιών:

i) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$ (εφόσον $\beta\delta \neq 0$)

ii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ (εφόσον $\beta\gamma\delta \neq 0$)

iii) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$ (εφόσον $\beta\delta \neq 0$)

iv) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ (εφόσον $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$)

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Για $\beta\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \beta\delta\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \beta\delta\cdot\frac{\gamma}{\delta}\ \alpha\delta = \beta\gamma$$

ii) Για $\beta\gamma\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha\delta}{\gamma\delta} = \frac{\beta\gamma}{\gamma\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

iii) Για $\beta\delta \neq 0$ έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{\gamma}{\delta} + 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

iv) Για $\beta\delta(\beta+\delta) \neq 0$, αν θέσουμε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \lambda$,έχουμε:

$\alpha = \lambda\beta$ και $\gamma = \lambda\delta$, οπότε $\alpha + \gamma = \lambda(\beta + \delta)$.

Επομένως, $\lambda = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$, δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

2η Να αποδειχθεί ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Στη συνέχεια, με τη χρήση του κανόνα και του διαβήτη, να παρασταθούν οι $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε μπορούμε να γράψουμε $\sqrt{2} = \dfrac{\kappa}{\lambda}$, όπου κ, λ είναι φυσικοί αριθμοί και $\dfrac{\kappa}{\lambda}$ **ανάγωγο κλάσμα** (δηλαδή κλάσμα στο οποίο έχουν γίνει όλες οι δυνατές απλοποιήσεις). Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{\kappa}{\lambda}\right)^2$$

$$2 = \frac{\kappa^2}{\lambda^2}$$

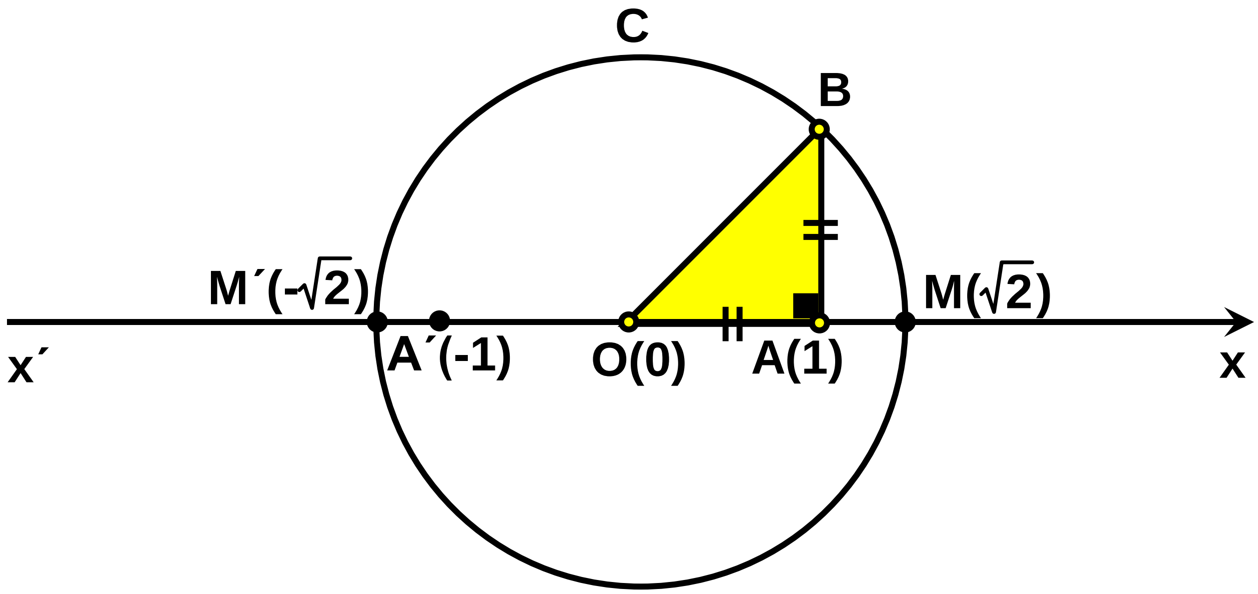
$$\kappa^2 = 2\lambda^2$$

που σημαίνει ότι ο κ^2 είναι άρτιος, οπότε (σελ. 31) και ο κ είναι άρτιος, δηλαδή είναι της μορφής $\kappa = 2\mu$.
Τότε έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \kappa^2 &= 2\lambda^2 \\ (2\mu)^2 &= 2\lambda^2 \\ 4\mu^2 &= 2\lambda^2 \\ \lambda^2 &= 2\mu^2 \end{aligned}$$

Που σημαίνει ότι ο λ^2 είναι άρτιος, άρα και ο λ είναι άρτιος.

Αφού λοιπόν οι κ, λ είναι άρτιοι, το κλάσμα $\dfrac{\kappa}{\lambda}$ δεν **είναι ανάγωγο** (άτοπο).



Στο σημείο Α του πραγματικού άξονα που παριστάνει τον αριθμό 1 υψώνουμε κάθετο τμήμα ΑΒ με μήκος 1. Τότε η υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ έχει μήκος ίσο με $\sqrt{2}$. Στη συνέχεια με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΒ = $\sqrt{2}$ γράφουμε κύκλο ο οποίος τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία Μ και Μ΄ που παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{2}$ και $-\sqrt{2}$ αντιστοίχως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η παράσταση $A = \left[(x^2y^3)^{-2} \cdot (xy^3)^4 \right] : \left(\dfrac{x^3}{y^{-1}} \right)^{-3}$

i) Να δείξετε ότι $A = x^9 \cdot y^9$

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης για $x = 2010$ και $y = \dfrac{1}{2010}$.

2. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \left[(xy^{-1})^2 : (x^3y^7)^{-1} \right]^2$$ για $x = 0,4$ και $y = -2,5$.

3. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

i) $1001^2 - 999^2$ ii) $99 \cdot 101$ iii) $\dfrac{(7,23)^2 - (4,23)^2}{11,46}$

4. i) Να δείξετε ότι $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta)^2 = 4\alpha\beta$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\left(\frac{999}{1000} + \frac{1000}{999} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} - \frac{1000}{999} \right)^2$$

5. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) = 1$.

ii) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$(1,3265)^2 - 0,3265 \cdot 2,3265$.

6. Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δυο διαδοχικών φυσικών αριθμών (του μικρότερου από του μεγαλύτερου) ισούται με το άθροισμά τους.

7. Αν ν φυσικός αριθμός, να δείξετε ότι ο αριθμός $2^{\nu} + 2^{\nu+1} + 2^{\nu+2}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha}{\alpha^2 - \alpha}$ ii) $\dfrac{\left(\alpha^2 - \alpha\right) + 2\alpha - 2}{\alpha^2 - 1}$

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\left(\alpha - \dfrac{1}{\alpha}\right)^2 \cdot \dfrac{\alpha^3 + \alpha^2}{(\alpha + 1)^3}$ ii) $\dfrac{\alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha + 1} \cdot \dfrac{\alpha^2 - 1}{\alpha^3 - 1}$

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $(x + y)^2 \cdot (x^{-1} + y^{-1})^{-2}$ ii) $\dfrac{x + y}{x - y} \cdot \dfrac{x^{-1} - y^{-1}}{x^{-2} - y^{-2}}$

4. Να δείξετε ότι $\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}\right) : \left(\dfrac{x^2}{x - y} - y\right) = 1$

5. Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$. ii) Αν $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha$.

6. Να δείξετε ότι, αν ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $L = 4\alpha$ και εμβαδόν $E = \alpha^2$, τότε το ορθογώνιο αυτό είναι τετράγωνο με πλευρά ίση με α.

7. Να δείξετε ότι:

i) Αν α ρητός και β άρρητος, τότε α + β άρρητος.

ii) Αν α ρητός, με $\alpha \neq 0$, και β άρρητος, τότε $\alpha \cdot \beta$ άρρητος.

1.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Έννοια της διάταξης

Οι έννοιες «μεγαλύτερος από», «μικρότερος από», που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, ορίστηκαν ως εξής:

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι **μεγαλύτερος** από έναν αριθμό β, και γράφουμε **α > β**, όταν η διαφορά **α - β** είναι θετικός αριθμός.

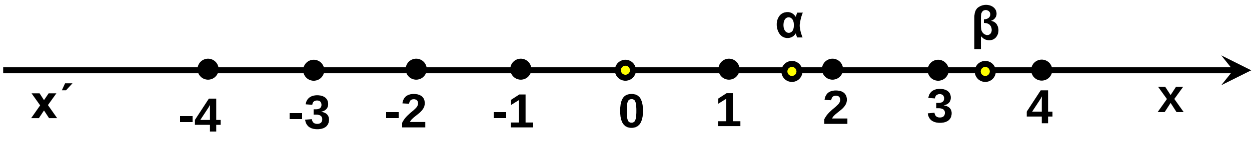
Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι ο β είναι μικρότερος του α και γράφουμε β < α
Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει αμέσως ότι:

- **Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το μηδέν.**
- **Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος από το μηδέν.**

Έτσι ο αρχικός ορισμός γράφεται ισοδύναμα:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

Γεωμετρικά η ανισότητα α > β σημαίνει ότι, πάνω στον άξονα των πραγματικών ο αριθμός α είναι δεξιότερα από τον β .



Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει α > β ή α = β , τότε γράφουμε α > β και διαβάζουμε: «α μεγαλύτερος ή ίσος του β».
Από τον τρόπο με τον οποίο γίνονται οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, προκύπτει ότι:

- $(\alpha > 0 \text{ και } \beta > 0) \Rightarrow \alpha + \beta > 0$
  $(\alpha < 0 \text{ και } \beta < 0) \Rightarrow \alpha + \beta < 0$

- α, β ομόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} > 0$
  α, β ετερόσημοι $\Leftrightarrow \alpha \cdot \beta < 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} < 0$

- $\alpha^2 \geq 0$, για κάθε $\alpha \in R$
  (Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha = 0$)

Από την τελευταία εύκολα προκύπτουν και οι ισοδυναμίες:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$$
$$\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων

Στηριζόμενοι στην ισοδυναμία $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$, μπορούμε να αποδείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες των ανισοτήτων:

1. $(\alpha > \beta \text{ και } \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$

2.
- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

3.
- $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς α, β, γ, δ ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Η ιδιότητα 3. ισχύει και για περισσότερες ανισότητες. Συγκεκριμένα:

- ✓ $(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και} \dots \text{και } \alpha_\nu > \beta_\nu)$

  $\Rightarrow \ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_\nu > \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_\nu$
- ✓ **Αν, επιπλέον, τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί, τότε:**
- ✓ $(\alpha_1 > \beta_1 \text{ και } \alpha_2 > \beta_2 \text{ και} \dots \text{και } \alpha_\nu > \beta_\nu)$

  $\Rightarrow \ \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_\nu > \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_\nu \quad (*)$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε και την παρακάτω ιδιότητα.

4. **Για θετικούς αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:**

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- **Έστω $\alpha > \beta$. Τότε, από τη (*), για**

  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_\nu = \alpha > 0$ **και** $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_\nu = \beta > 0$,

  προκύπτει ότι: $\alpha^\nu > \beta^\nu$.
- **Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu > \beta^\nu$ και $\alpha < \beta$. Τότε:**

✓ **αν ήταν $\alpha = \beta$, από τον ορισμό της ισότητας θα είχαμε $\alpha^\nu = \beta^\nu$ (άτοπο), ενώ**

✓ **αν ήταν $\alpha < \beta$, θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).**

Άρα, $\alpha > \beta$.

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας θα αποδείξουμε τώρα ότι:

Για <u>θετικούς</u> αριθμούς α, β και <u>θετικό ακέραιο</u> ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

- **Έστω $α = β$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας προκύπτει, όπως είπαμε και προηγουμένως, ότι $α^ν = β^ν$.**
- **Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $α^ν = β^ν$ και $α \neq β$. Τότε:**

✓ αν ήταν $α > β$, λόγω της (4), θα είχαμε $α^ν > β^ν$ (άτοπο), ενώ

✓ αν ήταν $α < β$, λόγω της (4), θα είχαμε $α^ν < β^ν$ (άτοπο).

Άρα, $α = β$.

ΣΧΟΛΙΑ

1ο Σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς τις προσθέσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την αφαίρεση. Για παράδειγμα, είναι $10 > 6$ και $7 > 2$, αλλά $10 - 7 < 6 - 2$.

2ο Επίσης, σύμφωνα με την ιδιότητα 3, αν δυο ανισότητες της ίδιας φοράς με θετικούς, όμως, όρους τις πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη, προκύπτει ανισότητα της ίδιας φοράς. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με τη διαίρεση. Για παράδειγμα, είναι $24 > 10$ και $6 > 2$, αλλά $\frac{24}{6} < \frac{10}{2}$.

Διαστήματα

Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $α \leq x \leq β$ λέγεται κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με [α, β].

Αν τώρα από το κλειστό διάστημα [α, β] παραλείψουμε τα α και β προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα από το α μέχρι β που συμβολίζεται με (α, β) .

Οι αριθμοί **α** και **β** λέγονται **άκρα των διαστημάτων** αυτών και κάθε αριθμός μεταξύ των **α** και **β** λέγεται **εσωτερικό σημείο** αυτών.
Η διαφορά δηλαδή μεταξύ ενός κλειστού και του αντίστοιχου ανοικτού διαστήματος είναι ότι το πρώτο περιέχει τα άκρα του, ενώ το δεύτερο δεν τα περιέχει.
Άλλες μορφές διαστημάτων είναι:

✓ Το **ανοικτό δεξιά διάστημα [α, β)** που αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει **α ≤ x ≤ β** και

✓ Το **ανοικτό αριστερά διάστημα (α, β]** που αποτελείται από τους αριθμούς με x για τους οποίους ισχύει **α < x ≤ β** .

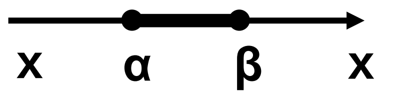
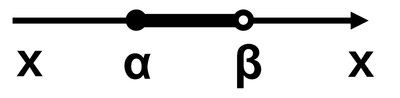
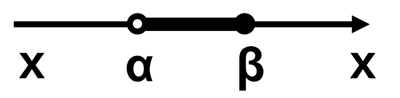
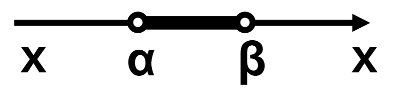
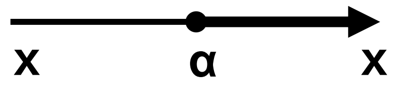
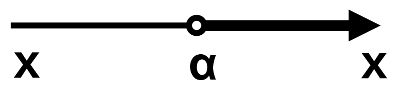
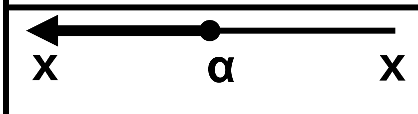
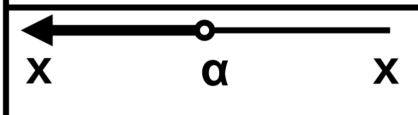
Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει **α ≤ x** συμβολίζεται με **[α, +∞)**, ενώ

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει **x ≤ α** συμβολίζεται με **(-∞, α]**.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα **(α, +∞)** και **(-∞, α)**. Τα σύμβολα **+∞** και **-∞**, που διαβάζονται «**συν άπειρο**» και «**πλην άπειρο**» αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta]$
	$\alpha \leq x \leq \beta$	$[\alpha, \beta)$
	$\alpha < x \leq \beta$	$(\alpha, \beta]$
	$\alpha < x \leq \beta$	(α, β)
	$x \geq \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
	$x \leq \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να αποδειχθεί ότι :

i) Αν α, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$

ii) Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

iii) Αν $\alpha > 0$**, τότε** $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

i) Αφού α, β είναι ομόσημοι αριθμοί έχουμε $\alpha\beta > 0$. Επομένως ισχύει: $\alpha < \beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha\beta} < \dfrac{\beta}{\alpha\beta} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\beta} < \dfrac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\beta}$.

ii) Έχουμε:

$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0$, **που ισχύει**

iii) Έχουμε:

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 \geq 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 2\alpha \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$,

που ισχύει.

2η Αν $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{4}$ **και** $-\dfrac{2}{3} < y < \dfrac{5}{6}$**, να αποδειχθεί**

ότι: $-11 < 8x - 12y + 3 < 17$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Από την ανισότητα $-\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{3}{4}$ **έχουμε διαδοχικά:**

$$8\left(-\frac{1}{2}\right) < 8x < 8 \cdot \frac{3}{4}$$

$$-4 < 8x < 6 \qquad (1)$$

Ομοίως από την $-\dfrac{2}{3} < y < \dfrac{5}{6}$ **έχουμε διαδοχικά:**

$$12\left(-\frac{2}{3}\right) < 12y < 12 \cdot \frac{5}{6}$$

$$-8 < 12y < 10$$

$$8 > -12y > -10$$

$$-10 < -12y < 8 \qquad (2)$$

Προσθέτουμε τώρα κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-14 < 8x - 12y < 14,$$

οπότε θα ισχύει:

$$-14 + 3 < 8x - 12y + 3 < 14 + 3$$

Άρα

$$-11 < 8x - 12y + 3 < 17$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$ ii) $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2$

2. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha + 1 \geq 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) Αν $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 0$

ii) Αν $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$

4. Αν $4{,}5 < x < 4{,}6$ και $5{,}3 < y < 5{,}4$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

i) $x + y$ ii) $x - y$ iii) $\dfrac{x}{y}$ iv) $x^2 + y^2$

5. Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου ικανοποιούν τις ανισότητες $2 < x < 3$ και $3 < y < 5$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 0,2 και ελαττώσουμε το μήκος κατά 0,1, να βρείτε τις δυνατές τιμές:

i) της περιμέτρου

ii) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

6. Αν $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\dfrac{\alpha}{1 + \alpha} < \dfrac{\beta}{1 + \beta}$.

7. Να βρείτε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

Έστω $x > 5$. Τότε έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} x &> 5 \\ 5x &> 25 \\ 5x - x^2 &> 25 - x^2 \\ x(5 - x) &> (5 + x)(5 - x) \\ x &> 5 + x \\ 0 &> 5. \end{aligned}$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνονται ένα κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με θετικούς όρους και ένας θετικός αριθμός γ. Να αποδείξετε ότι:

i) Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} > \frac{\alpha}{\beta}$

ii) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma} < \frac{\alpha}{\beta}$

2. Αν $\alpha > 1 > \beta$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$

3. Αν α, β θετικοί αριθμοί, να δείξετε ότι

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \geq 4.$$

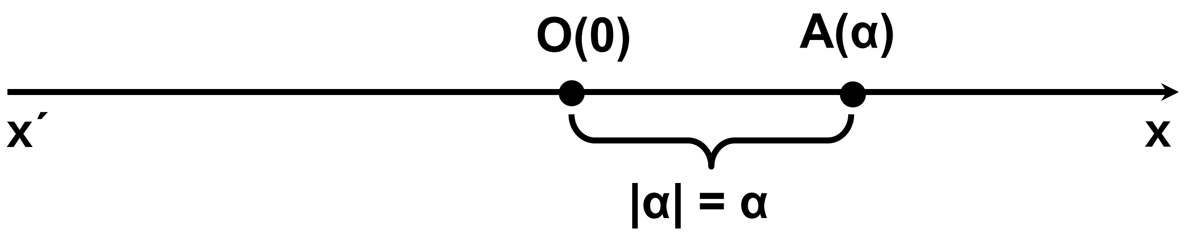
4. Να αποδείξετε ότι:

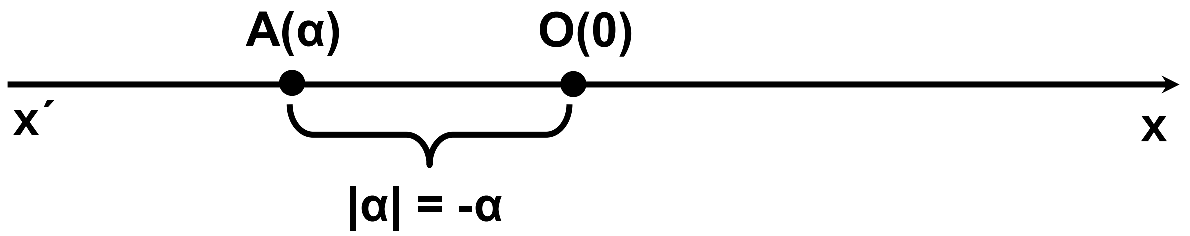
i) $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$ ii) $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$

1.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Ορισμός της απόλυτης τιμής

Θεωρούμε έναν αριθμό α που παριστάνεται με το σημείο Α πάνω σε έναν άξονα.





Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο ότι η απόσταση του σημείου Α από την αρχή Ο, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΟΑ, ονομάζεται απόλυτη τιμή του αριθμού α και την συμβολίζεται με |α|.

Από τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάστηκε ο άξονας προκύπτει ότι:

- $|2| = 2$, $\left|-\dfrac{13}{5}\right| = \dfrac{13}{5}$, και $|\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ γενικά: **$|\alpha| = \alpha$, για κάθε $\alpha > 0$.**

  Δηλαδή:

  Η απόλυτη τιμή θετικού αριθμού είναι ο ίδιος ο αριθμός.

- $|-2| = 2$, $\left|-\dfrac{13}{5}\right| = \dfrac{13}{5}$,και $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$ γενικά $|\alpha| = -\alpha$, για κάθε $\alpha < 0$.

  Δηλαδή:

Η απόλυτη τιμή αρνητικού αριθμού είναι ο αντίθετός του.

- $|0| = 0$

Επομένως, έχουμε τον ακόλουθο αλγεβρικό ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha < 0 \end{cases}$$

Από τα προηγούμενα συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:
- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Για παράδειγμα,

✓ $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$ ή $x = -5$

✓ $|\alpha - \beta| = |2\alpha - 3\beta| \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2\alpha - 3\beta$ ή $\alpha - \beta = 3\beta - 2\alpha$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2\beta \text{ ή } \alpha = \frac{4}{3}\beta$$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

Από τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων μεταξύ πραγματικών αριθμών, προκύπτουν για τις απόλυτες τιμές οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$1.\ |\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$$
$$2.\ \left|\frac{\alpha}{\beta}\right| < \frac{|\alpha|}{|\beta|}$$
$$3.\ |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Οι ιδιότητες αυτές, όμως, μπορούν να αποδειχθούν και με τη βοήθεια των προηγούμενων συμπερασμάτων.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = (|\alpha| \cdot |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2,\text{ που ισχύει.}$$

2. Αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο.

3. Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| < |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha+\beta|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2$$
$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 + 2|\alpha\beta|$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|,\text{ που ισχύει.}$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.

ΣΧΟΛΙΟ

- Η ισότητα $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους παράγοντες. Συγκεκριμένα:

$$|\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \cdot \ldots \cdot |\alpha_\nu|$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι

$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = \alpha$, έχουμε:

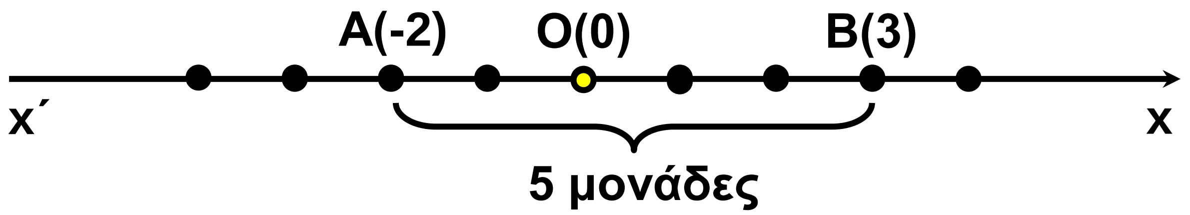
$$|\alpha^\nu| = |\alpha|^\nu$$

- **Η ανισότητα $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ ισχύει και για περισσότερους προσθετέους. Συγκεκριμένα:**

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$$

Απόσταση δυο αριθμών

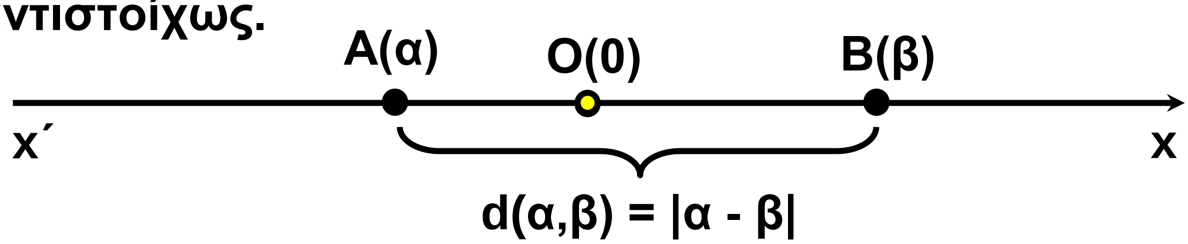
- **Ας πάρουμε τώρα δυο αριθμούς, για παράδειγμα τους -2 και 3, που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.**



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών -2 και 3. Παρατηρούμε ότι

$$(AB) = 5 = |(-2) - 3| = |3 - (-2)|.$$

Γενικότερα, ας θεωρήσουμε δυο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντιστοίχως.

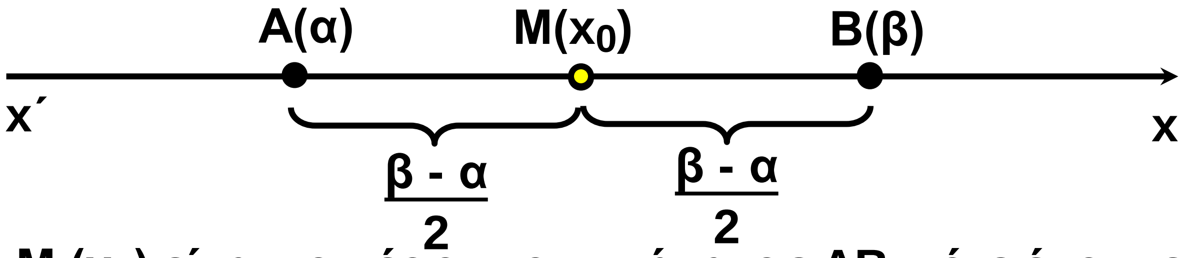


Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση των αριθμών α και β, συμβολίζεται με d(α,β) και είναι ίση με |α- β|. Είναι δηλαδή:

$$\boxed{d\,(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|}$$

Προφανώς ισχύει d (α, β) = d (β, α) . Στην περίπτωση μάλιστα που είναι α < β, τότε η απόσταση των α και β είναι ίση με β - α και λέγεται μήκος του διαστήματος [α, β].

• Ας θεωρήσουμε τώρα ένα διάστημα [α, β] και ας ονομάσουμε Α και Β τα σημεία που παριστάνουν στον άξονα τα άκρα α και β αντιστοίχως.



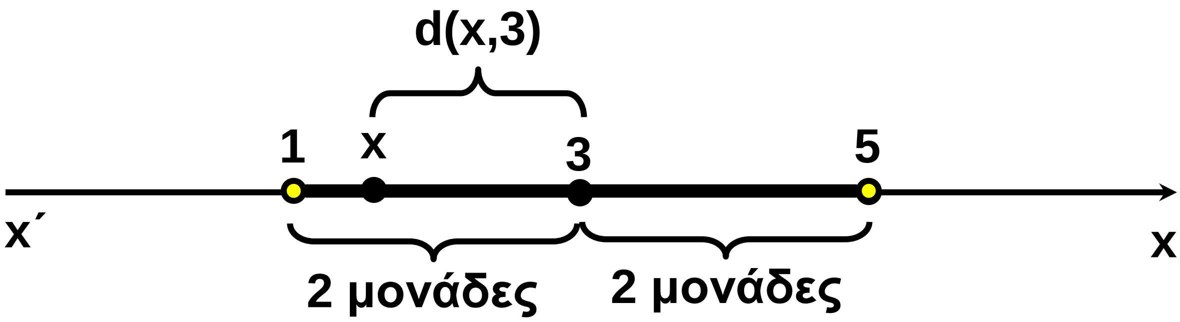
Αν Μ (x_0) είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
(MA) = (MB) &\Leftrightarrow d(x_0, \alpha) = d(x_0, \beta)\\
&\Leftrightarrow |x_0 - \alpha| = |x_0 - \beta|\\
&\Leftrightarrow x_0 - \alpha = \beta - x_0, \qquad (\text{αφού } \alpha < x_0 < \beta)\\
&\Leftrightarrow 2x_0 = \alpha + \beta\\
&\Leftrightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}
\end{aligned}
$$

Ο αριθμός $\frac{\alpha + \beta}{2}$ που αντιστοιχεί στο μέσον Μ του τμήματος ΑΒ λέγεται κέντρο του διαστήματος [α, β], ενώ ο αριθμός $\rho = \frac{\beta - \alpha}{2}$ λέγεται ακτίνα του [α, β].

Ως μήκος, κέντρο και ακτίνα των διαστημάτων (α, β), [α, β) και (α, β] ορίζουμε το μήκος, το κέντρο και την ακτίνα του διαστήματος [α, β].

• Έστω τώρα ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει |x - 3| < 2.



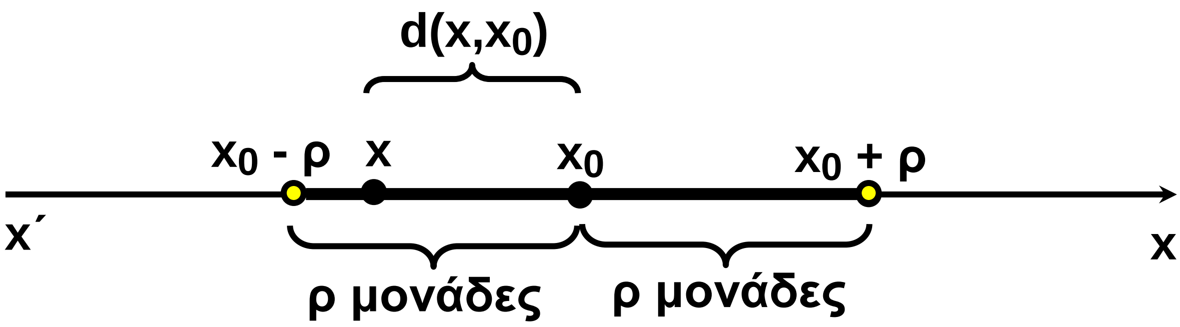
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$
\begin{aligned}
|x - 3| < 2 &\Leftrightarrow d(x,3) < 2 \\
&\Leftrightarrow 3 - 2 < x < 3 + 2 \\
&\Leftrightarrow x \in (3 - 2,\ 3 + 2)
\end{aligned}
$$

Γενικά:

> **Για $x_0 \in R$ και $\rho > 0$, ισχύει:**
>
> $$\begin{aligned} |x - x_0| < \rho &\Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho,\ x_0 + \rho) \\ &\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho \end{aligned}$$

Δηλαδή, οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| < \rho$ είναι τα σημεία του διαστήματος $(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho)$ που έχει κέντρο το x_0 και ακτίνα ρ.



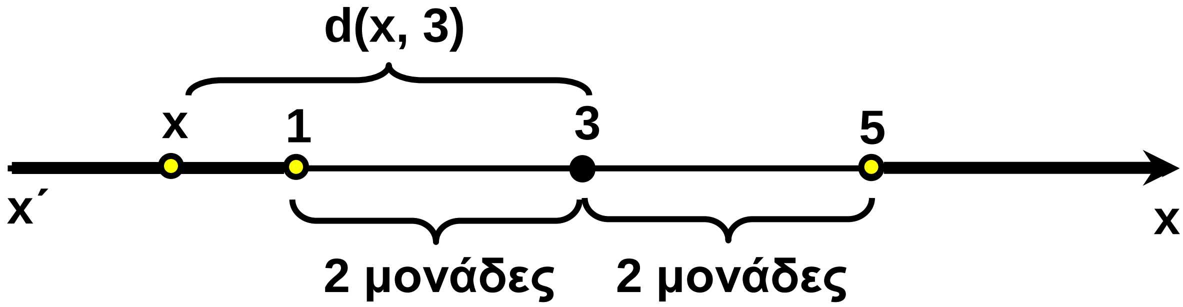
Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, έχουμε:

$$|x| < \rho \Leftrightarrow x \in (-\rho,\ \rho) \Leftrightarrow -\rho < x < \rho\ .$$

Για παράδειγμα,

$$|x| < 2 \Leftrightarrow x \in (-2,\ 2) \Leftrightarrow -2 < x < 2\ .$$

• Έστω, τώρα, ότι θέλουμε να βρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x - 3| > 2$.



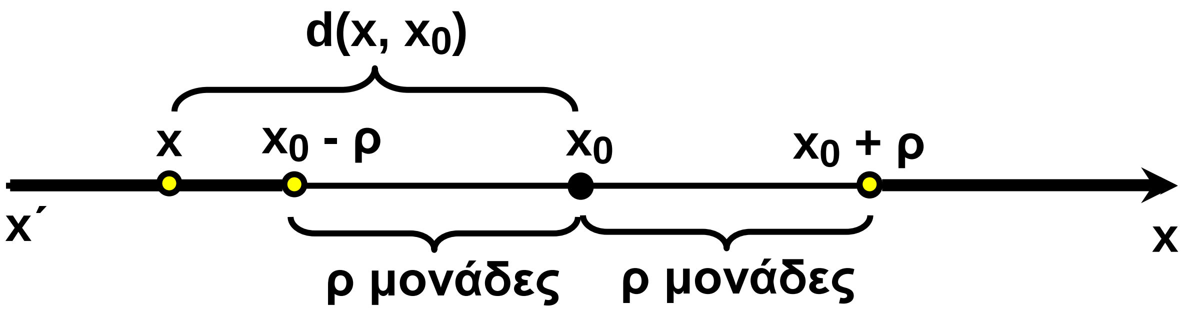
Από τον ορισμό της απόστασης έχουμε:

$$\begin{aligned} |x - 3| > 2 &\Leftrightarrow d(x,3) > 2 \\ &\Leftrightarrow x < 3 - 2 \quad ή \quad x > 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 3 - 2) \cup (3 + 2, +\infty). \end{aligned}$$

Γενικά:

> **Για $x_0 \in R$ και $\rho > 0$, ισχύει:**
>
> $$\begin{aligned} |x - x_0| < \rho &\Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty) \\ &\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \text{ ή } x > x_0 + \rho \end{aligned}$$

Δηλαδή οι αριθμοί x που ικανοποιούν τη σχέση $|x - x_0| > \rho$ αντιστοιχούν σε σημεία $M(x)$ του άξονα $x΄x$ που απέχουν από το σημείο $K(x_0)$ απόσταση μεγαλύτερη του ρ.



Στην ειδική περίπτωση που είναι $x_0 = 0$, η τελευταία ισοδυναμία παίρνει τη μορφή:

$$|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho \quad ή \quad x > \rho$$

Για παράδειγμα:

$$|x| > 2 \Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 2 .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i) $|\pi - 3|$ ii) $|\pi - 4|$

iii) $|3 - \pi| + |4 - \pi|$ iv) $\left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| - \left|\sqrt{3} - \sqrt{2}\right|$.

2. Αν $3 < x < 4$, να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση

$$|x - 3| + |x - 4|$$

3. Να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή την παράσταση $|x - 3| - |4 - x|$, όταν:

i) $x < 3$ ii) $x > 4$.

4. Αν $\alpha \neq \beta$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $\left|\dfrac{\alpha - \beta}{\beta - \alpha}\right|$.

5. Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$, να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η παράσταση $A = \dfrac{|x|}{x} + \dfrac{|y|}{y}$

6. Η διάμετρος ενός δίσκου μετρήθηκε και βρέθηκε 2,37dm. Το λάθος της μέτρησης είναι το πολύ 0,005dm. Αν D είναι η πραγματική διάμετρος του κύκλου, τότε:

i) Να εκφράσετε την παραπάνω παραδοχή με τη βοήθεια της έννοιας της απόστασης

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή D.

7. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα όπως δείχνει η πρώτη γραμμή του.

ΠΙΝΑΚΑΣ

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\lvert x - 4\rvert \leq 2$	$d(x,4) \leq 2$	$[2, 6]$
$\lvert x + 3\rvert < 4$		
$\lvert x - 4\rvert > 2$		
$\lvert x + 3\rvert \geq 4$		
	$d(x,5) < 1$	
	$d(x,-1) > 2$	
	$d(x,5) \geq 1$	
	$d(x,-1) \leq 2$	
		$(-2, 2)$
		$[-5, 1]$
		$(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι $\lvert\alpha - \beta\rvert \leq \lvert\alpha - \gamma\rvert + \lvert\gamma - \beta\rvert$.

2. Αν $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha = \dfrac{\alpha + \beta + \lvert\alpha - \beta\rvert}{2}$ ii) $\beta = \dfrac{\alpha + \beta - \lvert\alpha - \beta\rvert}{2}$

3. Τι σημαίνει για τους αριθμούς x και y :

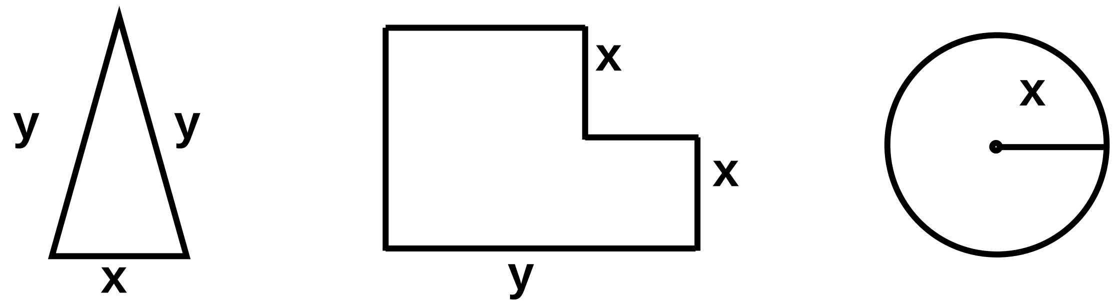
i) Η ισότητα $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert = 0$; ii) Η ανισότητα $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert > 0$;

4. Έστω $0 < α < β$.

i) Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς 1, $\frac{α}{β}$ και $\frac{β}{α}$.

ii) Να δείξετε ότι στον πραγματικό άξονα ο αριθμός $\frac{α}{β}$ βρίσκεται πλησιέστερα στο 1 από ότι ο αριθμός $\frac{β}{α}$.

5. Αν $|x - 2| < 0,1$ και $|y - 4| < 0,2$ να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω σχημάτων:



Τετραγωνική ρίζα μη αρνητικού αριθμού

Στο Γυμνάσιο μάθαμε την έννοια της τετραγωνικής ρίζας μη αρνητικού αριθμού και τις ιδιότητές της. Συγκεκριμένα μάθαμε ότι:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{α}$ και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u> που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

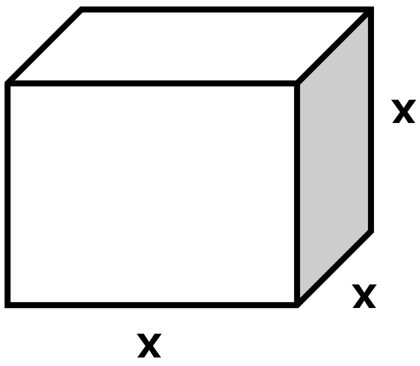
Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν α > 0, η $\sqrt{α}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2 = α$.

Για τις τετραγωνικές ρίζες μη αρνητικών αριθμών γνωρίσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\sqrt{α^2} = |α|$
- $\sqrt{α} \cdot \sqrt{β} = \sqrt{α \cdot β}$
- $\dfrac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}} = \sqrt{\dfrac{α}{β}}$

ν-οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού



Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε μια κυβική δεξαμενή χωρητικότητας 64 κυβικών μέτρων και ζητάμε την πλευρά της. Αν x μέτρα

είναι η πλευρά της δεξαμενής, τότε ο όγκος της θα είναι x^3 κυβικά μέτρα και επομένως θα ισχύει: $x^3 = 64$. Αναζητούμε λοιπόν έναν αριθμό x που, όταν υψωθεί στον κύβο, θα μας δώσει 64. Ο αριθμός αυτός, αφού παριστάνει μήκος, πρέπει να είναι θετικός. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 4, διότι $4^3 = 64$.

$$\begin{tikzcd} 4 \arrow[r, bend left, "4^3"] & 64 \arrow[l, bend left, "\sqrt[3]{64}"] \end{tikzcd}$$

Ο αριθμός 4 λέγεται **τρίτη ρίζα** του 64 και συμβολίζεται με $\sqrt[3]{64}$. Δηλαδή $\sqrt[3]{64} = 4$. Η τρίτη ρίζα ενός αριθμού λέγεται και **κυβική ρίζα** του αριθμού αυτού. Γενικεύοντας τώρα τα παραπάνω για κάθε **θετικό ακέραιο ν**, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η **ν-οστή ρίζα** ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u>[1] που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον α.

Επίσης γράφουμε

$$\sqrt[1]{\alpha} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[2]{\alpha} = \sqrt{\alpha} \, .$$

Μπορούμε επομένως να πούμε ότι:

Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = \alpha$.

[1] Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι $10^4 = 10000$, οπότε $\sqrt[4]{10000} = 10$. Είναι επίσης και $(-10)^4 = 10000$. Όμως, <u>δεν επιτρέπεται</u> να γράφουμε $\sqrt[4]{10000} = -10$, αφού, σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό, η $\sqrt[4]{10000}$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^4 = 10000$.

Ιδιότητες των ριζών

Από τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α , συμπεραίνουμε αμέσως ότι:

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$$

Για παράδειγμα:

$$\sqrt[6]{2^6} = 2 \text{ , ενώ } \sqrt[6]{(-2)^6} = |-2| = 2 \text{ .}$$

Ισχύουν όμως και οι ακόλουθες ιδιότητες, από τις οποίες οι δύο πρώτες είναι ανάλογες των ιδιοτήτων της τετραγωνικής ρίζας:

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$
2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)
3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$
4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

1. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta})^{\nu} = (\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta})^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu} = \alpha \cdot \beta$$

$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta$, που ισχύει.

2. Αποδεικνύεται όπως και η 1.

3. Έχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = (\sqrt[\mu\nu]{\alpha})^{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}\right)^{\mu}\right]^{\nu} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \alpha, \qquad \text{που ισχύει}$$

4. Έχουμε:

$$\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu\rho}}} = \sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{(\alpha^{\mu})^{\rho}}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Η ιδιότητα 1. ισχύει και για περισσότερους από δυο μη αρνητικούς παράγοντες. Συγκεκριμένα, για μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\kappa$ ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha_1} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[\nu]{\alpha_\kappa} = \sqrt[\nu]{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_\kappa}$$

Στην ειδική μάλιστα περίπτωση που είναι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\kappa = \alpha > 0$, ισχύει:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\kappa}} = (\sqrt[\nu]{\alpha})^{\kappa} ,$$

οπότε, λόγω της ιδιότητας 1, για α , β ≥ 0 έχουμε

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\ .$$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Στη συνέχεια θα ορίσουμε παραστάσεις της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου α > 0, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τις οποίες θα ονομάσουμε **δυνάμεις με ρητό εκθέτη**. Ο ορισμός θα γίνει με τέτοιο τρόπο, ώστε να διατηρούνται οι γνωστές μας ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη.

Τι θα πρέπει, για παράδειγμα, να σημαίνει το $3^{\frac{2}{5}}$; Αν απαιτήσουμε να ισχύει η ιδιότητα $\left(\alpha^p\right)^q = \alpha^{pq}$ και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη, τότε θα είναι $\left(3^{\frac{2}{5}}\right)^5 = 3^{\frac{2}{5}\cdot 5} = 3^2$.

Άρα πρέπει ο $3^{\frac{2}{5}}$ να είναι λύση της εξίσωσης $x^5 = 3^2$.

Δηλαδή πρέπει να είναι $3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2}$. Γενικά:

ΟΡΙΣΜΟΣ

> Αν **α > 0**, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:
>
> $$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$$

Επιπλέον, αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$. Για παράδειγμα:

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4 \text{ και } 27^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{27^{-4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{27^4}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^4}} = \frac{1}{3^4}$$

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των ριζών αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη ισχύουν και για δυνάμεις με ρητό εκθέτη. Το γεγονός αυτό διευκολύνει το λογισμό με τα ριζικά. Έτσι έχουμε για παράδειγμα είναι:

$$\sqrt[4]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{4}} \cdot \alpha^{\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = \alpha^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{\alpha^7}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Αν α και β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να αποδειχθεί η ισοδυναμία:

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} < \left(\sqrt[\nu]{\beta}\right)^{\nu}$$

$$\Leftrightarrow \alpha < \beta \text{, που ισχύει.}$$

2η Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές:

i) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ ii) $\frac{10}{\sqrt{5}-1}$ iii) $\frac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$\text{i) } \frac{15}{\sqrt{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{15 \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{15\sqrt{3}}{3} = 5\sqrt{3}.$$

ii) $\dfrac{10}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} = \dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \dfrac{10(\sqrt{5}+1)}{5-1} =$

$= \dfrac{5(\sqrt{5}+1)}{2}$

iii) $\dfrac{6}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} = \dfrac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})} =$

$= \dfrac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{6(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5} = 3(\sqrt{7}-\sqrt{5}).$

3η Να αποδειχθεί ότι:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40} = 10\,.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

$$\sqrt{10}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{40} = 10^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 40^{\frac{1}{6}} =$$

$$= (2\cdot 5)^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot (2^3\cdot 5)^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{3}{6}}\cdot 5^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{6}} =$$

$$= 2^1\cdot 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2\cdot 5 = 10$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

i) $\sqrt{100}$, $\sqrt[3]{1000}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[5]{100000}$.

ii) $\sqrt{4}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$.

iii) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt[3]{0.001}$, $\sqrt[4]{0.0001}$, $\sqrt[5]{0,00001}$.

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά

i) $\sqrt{(\pi - 4)^2}$ ii) $\sqrt{(-20)^2}$ iii) $\sqrt{(x - 1)^2}$ iv) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}$

3. Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2} + \sqrt{(3 - \sqrt{5})^2} = 1$.

4. Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{x - 5} - \sqrt{x + 3}) \cdot (\sqrt{x - 5} + \sqrt{x + 3}) = -8$$

5. Να αποδείξετε ότι:

i) $(\sqrt{8} - \sqrt{18}) \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32}) = -14.$

ii) $(\sqrt{28} + \sqrt{7} + \sqrt{32}) \cdot (\sqrt{63} - \sqrt{32}) = 31.$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2$

ii) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}} = 2$.

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{\sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}$ ii) $\sqrt[5]{2\sqrt{2\sqrt[3]{2}}} = \sqrt[3]{2}$.

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} = 3 \cdot \sqrt[12]{3}$ ii) $\sqrt[9]{2^8} \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot \sqrt[18]{2^{13}}$

iii) $\sqrt{5^3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5^4} = 25 \cdot \sqrt{5}$.

9. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{25 \cdot \sqrt{12}}{\sqrt{75}} = 10$ ii) $\dfrac{\sqrt{216} \cdot \sqrt{75}}{\sqrt{50}} = 18$.

10. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρανομαστές:

i) $\dfrac{4}{5 - \sqrt{3}}$ ii) $\dfrac{8}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ iii) $\dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{\sqrt{7} - \sqrt{6}}$

11. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{\sqrt{162} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} - \sqrt{32}} = 16$ ii) $\sqrt{\dfrac{9^{12} + 3^{20}}{9^{11} + 27^6}} = 3$,

αφού αναλύσετε τα υπόριζα σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = 5 + \sqrt{6}$$

ii) Αν α, β > 0 να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha\sqrt{\alpha} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}} = (\alpha + \beta) + \sqrt{\alpha\beta} \ .$$

2. i) Να βρείτε τα αναπτύγματα των

$$(3 + 2\sqrt{7})^2 \text{ και } (3 - 2\sqrt{7})^2 \ .$$

ii) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{37 + 12\sqrt{7}} - \sqrt{37 - 12\sqrt{7}} = 6 \ .$$

3. i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2$ είναι ρητός

ii) Αν α θετικός ρητός, να αποδείξετε ότι ο $\left(\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2$ είναι ρητός.

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = 4$ ii) $\frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2} - \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3}$.

5. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι κάθετες πλευρές του είναι $ΑΓ = \sqrt{\beta}$ και $ΑΒ = \sqrt{\alpha}$

i) Να υπολογίσετε την υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου.

ii) Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha + \beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \ .$$

iii) Για μη αρνητικούς αριθμούς α και β , να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$. Πότε ισχύει η ισότητα;

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι α-ληθής <u>για όλους</u> τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ και δ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	$(\alpha = \beta$ και $\gamma = \delta) \Leftrightarrow \alpha + \gamma = \beta + \delta$.	Α Ψ
2.	Αν $\alpha^2 = \alpha\beta$, τότε $\alpha = \beta$.	Α Ψ
3.	$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.	Α Ψ
4.	Το άθροισμα $\alpha + \beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός	Α Ψ
5.	Το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ δύο άρρητων αριθμών α και β είναι άρρητος αριθμός.	Α Ψ
6.	Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$.	Α Ψ
7.	Αν $\alpha^2 > \alpha\beta$, τότε $\alpha > \beta$.	Α Ψ
8.	Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} > 1$, τότε $\alpha > \beta$.	Α Ψ
9.	Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha > -\beta$, τότε $\alpha > 0$.	Α Ψ
10.	Αν $\alpha > \dfrac{1}{\alpha}$, τότε $\alpha > 1$.	Α Ψ
11.	Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 > \beta^2$.	Α Ψ
12.	Αν $\alpha > -2$ και $\beta > -3$, τότε $\alpha\beta > 6$.	Α Ψ
13.	Αν $\alpha < -2$ και $\beta < -3$, τότε $\alpha\beta > 6$.	Α Ψ
14.	$4\alpha^2 - 20\alpha\beta + 25\beta^2 \geq 0$.	Α Ψ
15.	$(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$.	Α Ψ
16.	$(\alpha^2 - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 > 0$.	Α Ψ
17.	$(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$.	Α Ψ

18.	**Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε $\lvert\alpha + \beta\rvert = \lvert\alpha\rvert + \lvert\beta\rvert$.**	**Α Ψ**
19.	**Αν $\alpha^2 = \beta$, τότε $\alpha = \sqrt{2}$**	**Α Ψ**
20.	**$\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$.**	**Α Ψ**
21.	**Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.**	**Α Ψ**
22.	**Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$.**	**Α Ψ**
23.	**Αν $\beta \geq 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt{\beta}$.**	**Α Ψ**
24.	**$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$.**	**Α Ψ**
25.	**Αν $\alpha \geq 0$, τότε μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[6]{\alpha^3} = \sqrt{\alpha}$.**	**Α Ψ**
26.	**Μπορούμε πάντοτε να γράφουμε $\sqrt[4]{\alpha^2} = \sqrt{\alpha}$.**	**Α Ψ**
27.	**$5^{25} > 25^5$.**	**Α Ψ**
28.	**$11^{22} > 22^{11}$.**	**Α Ψ**

ΙΙ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

1. Αν $2 < x < 5$ τότε η παράσταση $\lvert x - 2\rvert + \lvert x - 5\rvert$ είναι ίση με:

Α) $2x - 7$ Β) $7 - 2x$ Γ) -3 Δ) 3.

2. Αν $10 < x < 20$ τότε η τιμή της παράστασης

$$\frac{\lvert x - 10\rvert}{x - 10} + \frac{\lvert x - 20\rvert}{x - 20}$$ είναι ίση με:

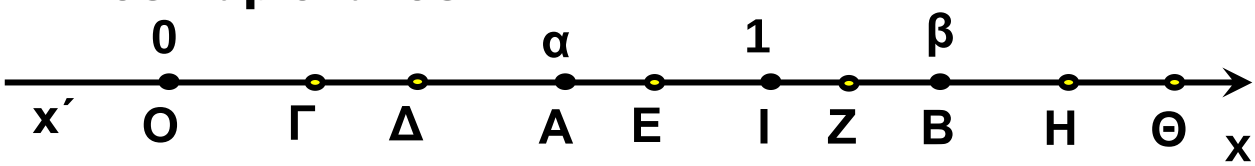
Α) 2 Β) -2 Γ) 10 Δ) 0.

3. Αν $\alpha = \sqrt[6]{10}$, $\beta = \sqrt{2}$ και $\gamma = \sqrt[3]{3}$ τότε:
Α) $\alpha < \beta < \gamma$ Β) $\alpha < \gamma < \beta$ Γ) $\gamma < \alpha < \beta$ Δ) $\beta < \gamma < \alpha$.

4. Ο αριθμός $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$ είναι ίσος με:

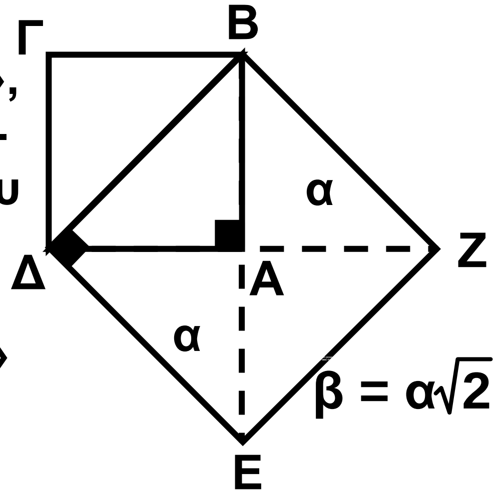
Α) $3 + 2\sqrt{5}$ Β) $3 + 2\sqrt[4]{5}$ Γ) $2 + \sqrt{5}$ Δ) $2 + \sqrt[4]{5}$.

III. Στον παρακάτω άξονα τα σημεία Ο, Ι, Α και Β παριστάνουν τους αριθμούς 0, 1, α και β αντιστοίχως, με 0 < α < 1 και β > 1, ενώ τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ παριστάνουν τους αριθμούς $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, α^2 , β^2, α^3 και β^3, όχι όμως με την σειρά που αναγράφονται. Να αντιστοιχίσετε τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ, Η και Θ με τους αριθμούς που παριστάνουν.



Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ



Ο «διπλασιασμός του τετραγώνου», δηλαδή η κατασκευή ενός τετραγώνου με εμβαδό διπλάσιο ενός άλλου δοθέντος τετραγώνου, μπορεί να γίνει με μια απλή «γεωμετρική» κατασκευή. Λέγοντας «γεωμετρική» κατασκευή εννοούμε κατασκευή με χάρακα και διαβήτη.
Ωστόσο, η πλευρά β, του τετραγώνου με το διπλάσιο εμβαδό, δεν προκύπτει από την πλευρά α με πολλαπλασιασμό επί ρητό αριθμό. Αυτό σημαίνει ότι δεν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα (ως μονάδα μέτρησης) με το οποίο μπορούμε να μετρήσουμε ακριβώς τα δυο αυτά τμήματα, πλευρά και διαγώνιο τετραγώνου. Η απόδειξη της ύπαρξης άρρητων αριθμών θεωρείται μια από τις σπουδαιότερες ανακαλύψεις των Πυθαγορείων. (Πυθαγόρας: 6ος π. Χ. αιώνας). Οι αρχαίοι Έλληνες είχαν μια βαθειά πίστη ότι πάντοτε δυο ευθύγραμμα τμήματα έχουν κοινό μέτρο. Γι’ αυτό, στα πλαίσια της εποχής εκείνης, η ανακάλυψη αυτή των Πυθαγορείων δεν ήταν απλά και μόνο μια ενδιαφέρουσα μαθηματική πρόταση, αλλά σήμαινε την ανατροπή θεμελιωδών φιλοσοφικών αντιλήψεων για τον κόσμο και τη φύση. Ήταν κεντρική αντίληψη των Πυθαγορείων ότι η ουσία κάθε όντος μπορεί να αναχθεί σε φυσικούς αριθμούς. Ο νεοπυθαγόρειος Φιλόλαος γύρω στα 450 π.Χ., έγραφε:

«Πραγματικά το καθετί που γνωρίζουμε έχει έναν αριθμό (δηλαδή φυσικό). Αλλιώς θα ήταν αδύνατο να το γνωρίσουμε και να το καταλάβουμε με τη λογική. Το ένα είναι η αρχή του παντός».

Η ανακάλυψη λοιπόν ότι υπάρχουν μεγέθη και μάλιστα απλά, όπως η υποτείνουσα τετραγώνου, τα οποία δεν

μπορούν να εκφραστούν στα πλαίσια των φυσικών αριθμών, θεωρήθηκε αληθινή συμφορά για την πυθαγόρεια φιλοσοφία. Χαρακτηριστικοί είναι οι θρύλοι που περιβάλλουν το γεγονός αυτό. Κατά έναν από αυτούς, η ανακάλυψη της ύπαρξης των άρρητων αριθμών έγινε από τον πυθαγόρειο Ίπασσο, όταν αυτός και άλλοι Πυθαγόρειοι ταξίδευαν με πλοίο. Η αντίδραση των Πυθαγορείων ήταν να πνίξουν τον Ίπασσο και να συμφωνήσουν μεταξύ τους να μη διαδοθεί η ανακάλυψη προς τα έξω.

Η υπέρβαση των «δυσκολιών» που φέρνει στα Μαθηματικά η ύπαρξη άρρητων αριθμών, κατέστη δυνατή από τον Εύδοξο (360 π.Χ.) με την ιδιοφυή «θεωρία των Λόγων». Η απόδειξη για το ότι ένας συγκεκριμένος αριθμός είναι άρρητος είναι ένα πρόβλημα που απαιτεί πολλές φορές πολύπλοκους συλλογισμούς.

2 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Η Εξίσωση αx + β = 0

Στο Γυμνάσιο μάθαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων της μορφής αx + β = 0 για συγκεκριμένους αριθμούς α, β, με α ≠ 0 Γενικότερα τώρα, θα δούμε πώς με την βοήθεια των ιδιοτήτων των πράξεων, επιλύουμε την παραπάνω εξίσωση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι αριθμοί α, β .
Έχουμε λοιπόν

$$\alpha x + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta = -\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha x = -\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

- **Αν α ≠ 0 τότε:**

$$\alpha x = -\beta \Leftrightarrow x = -\frac{\alpha}{\beta}$$

  Επομένως, αν α ≠ 0 η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, την $x = -\frac{\alpha}{\beta}$.

- **Αν α = 0 , τότε η εξίσωση αx = - β γίνεται 0x = -β, η οποία:**
  i) αν είναι β ≠ 0 δεν έχει λύση και γι αυτό λέμε ότι είναι αδύνατη, ενώ
  ii) αν είναι β = 0 έχει τη μορφή 0x = 0 και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x δηλαδή είναι ταυτότητα.
  Η λύση της εξίσωσης αx + β = 0 και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και ρίζα αυτής.

Για παράδειγμα

✓ **Για την εξίσωση 4(x - 5) = x - 5 έχουμε:**

$$4(x - 5) = x - 5 \Leftrightarrow 4x - 20 = x - 5$$
$$\Leftrightarrow 4x - x = 20 - 5$$
$$\Leftrightarrow 3x = 15$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{15}{3} = 5.$$

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την x = 5 .

✓ **Για την εξίσωση 3x - x - 3 = 2x Έχουμε**

$$3x - x - 3 = 2x \Leftrightarrow 3x - x - 2x = 3 \Leftrightarrow 0x = 3$$

που είναι αδύνατη.

✓ **Για τη εξίσωση 4(x - 5) - x = 3x - 20 έχουμε**

$$4x - 20 - x = 3x - 20 \Leftrightarrow 4x - x - 3x = = 20 - 20 \Leftrightarrow 0x = 0$$

που είναι ταυτότητα.

ΣΧΟΛΙΟ

Όπως βλέπουμε στα παραπάνω παραδείγματα, κάθε φορά καταλήγουμε σε εξίσωση της μορφής αx + β = 0, της οποίας οι συντελεστές α και β είναι συγκεκριμένοι αριθμοί και μπορούμε αμέσως να δούμε ποια από τις προηγούμενες περιπτώσεις ισχύει. Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο, αν οι συντελεστές α και β της εξίσωσης αx + β = 0 εκφράζονται με τη βοήθεια γραμμάτων. Σε τέτοιες περιπτώσεις, τα γράμματα αυτά λέγονται παράμετροι, η εξίσωση λέγεται παραμετρική και η εργασία που κάνουμε για την εύρεση του πλήθους των ριζών της λέγεται διερεύνηση.

Για παράδειγμα η εξίσωση

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0,\ \lambda \in R$$

έχει παράμετρο το λ και γράφεται ισοδύναμα

$$(\lambda^2 - 1)x - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 - 1)x = \lambda - 1$$
$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 1)x = \lambda - 1$$

Επομένως

✓ Αν $\lambda \neq -1$ και $\lambda \neq 1$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την

$$x = \frac{\lambda - 1}{(\lambda + 1)(\lambda - 1)} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

✓ Αν $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = -2$ και είναι αδύνατη.
✓ Αν $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Ένας ποδηλάτης πήγε από μια πόλη Α σε μία πόλη Β και επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο. Στην μετάβαση οδηγούσε με μέση ταχύτητα 25km/h και ξεκουράστηκε ενδιάμεσα 1 ώρα. Στην επιστροφή οδηγούσε με μέση ταχύτητα 20 km/h και δεν έκανε καμία στάση. Αν ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν 10 ώρες, να υπολογιστεί το μήκος της διαδρομής ΑΒ.

ΛΥΣΗ

Αν x km είναι η απόσταση ΑΒ, τότε ο ποδηλάτης χρειάστηκε $\frac{x}{25}$ ώρες για να πάει από το Α στο Β και $\frac{x}{20}$ ώρες για να επιστρέψει. Αφού ξεκουράστηκε και 1 ώρα, ο συνολικός χρόνος του ταξιδιού ήταν $\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1$

Επειδή ο χρόνος αυτός είναι 10 ώρες έχουμε την εξίσωση: $\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10$

Λύνουμε την εξίσωση και έχουμε:

$$\frac{x}{25} + \frac{x}{20} + 1 = 10 \Leftrightarrow 4x + 5x + 100 = 1000$$
$$\Leftrightarrow 9x = 900$$
$$\Leftrightarrow x = 100$$

Άρα το μήκος της διαδρομής είναι 100 km.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού

Στην συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν εξισώσεις 1ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 1ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1}$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1} &\Leftrightarrow (x-1)\frac{x^2}{x-1} - (x-1) = (x-1)\frac{1}{x-1} \\ &\Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ , αφού } x \neq 1 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η εξίσωση

$|2x - 1| = |x + 3|$

ΛΥΣΗ

Από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών έχουμε:

$|2x - 1| = |x + 3| \Leftrightarrow 2x - 1 = x + 3$ **ή** $2x - 1 = -(x + 3)$

Όμως:

- ✓ $2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow 2x - x = 4 \Leftrightarrow x = 4$
- ✓ $2x - 1 = -(x + 3) \Leftrightarrow 2x + x = -3 + 1 \Leftrightarrow 3x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$.

Επομένως η εξίσωση έχει δυο λύσεις, τους αριθμούς 4 και $-\frac{2}{3}$.

ΣΧΟΛΙΟ
Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε κάθε εξίσωση της μορφής $|f(x)| = |g(x)|$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο
Να λυθεί η εξίσωση

$$|2x - 3| = 3x - 2$$

ΛΥΣΗ
Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή πρέπει και το δεύτερο μέλος της να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει:

$$3x - 2 > 0 \qquad (1)$$

Με αυτόν τον περιορισμό, λόγω των ιδιοτήτων των απόλυτων τιμών, έχουμε:

$$\begin{aligned} |2x - 3| = 3x - 2 &\Leftrightarrow 2x - 3 = 3x - 2 \quad \text{ή} \quad 2x - 3 = 2 - 3x \\ &\Leftrightarrow 2x - 3x = -2 + 3 \quad \text{ή} \quad 2x + 3x = 2 + 3 \\ &\Leftrightarrow -x = 1 \quad \text{ή} \quad 5x = 5 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 1 \end{aligned}$$

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x = 1$, διότι μόνο αυτή ικανοποιεί τον περιορισμό (1).
ΣΧΟΛΙΟ
Με τον ίδιο τρόπο λύνουμε εξισώσεις της μορφής $|f(x)| = g(x)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>
1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $4x - 3(2x - 1) = 7x - 42$ **ii)** $\frac{1 - 4x}{5} - \frac{x - 1}{4} = \frac{x - 4}{20} + \frac{5}{4}$

iii) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{4} - \frac{x}{5} - \frac{49}{60}$ **iv)** $1,2(x + 1) - 2,5 + 1,5x = 8,6$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $2(3x - 1) - 3(2x - 1) = 4$ ii) $2x - \frac{5 - x}{3} = -\frac{5}{3} + \frac{7x}{3}$.

3. Να λύσετε τις εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$

i) $(\lambda - 1)x = \lambda - 1$ ii) $(\lambda - 2)x = \lambda$

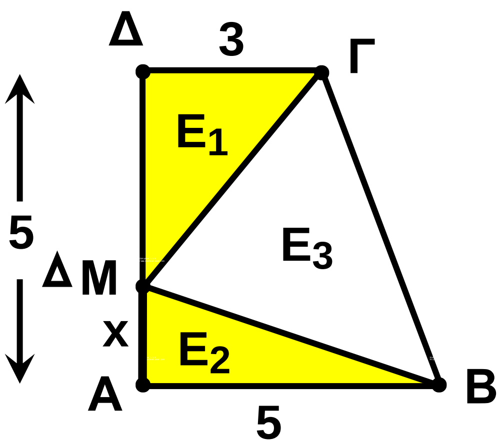
iii) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda - 1$ iv) $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 + \lambda$

4. Στο παρακάτω ορθογώνιο τραπέζιο να βρεθεί η θέση του σημείου Μ στην ΑΔ ώστε για τα εμβαδά

$E_1 = (\overset{\Delta}{M\Delta\Gamma})$, $E_2 = (\overset{\Delta}{MAB})$ και

$E_3 = (\overset{\Delta}{MB\Gamma})$ να ισχύει:

i) $E_1 + E_2 = E_3$ ii) $E_1 = E_2$



5. Από κεφάλαιο 4000 € ένα μέρος του κατατέθηκε σε μια τράπεζα προς 5% και το υπόλοιπο σε μια άλλη τράπεζα προς 3%. Ύστερα από 1 χρόνο εισπράχθηκαν συνολικά 175€ τόκοι. Ποιο ποσό τοκίστηκε προς 5% και ποιο προς 3%;

6. Να επιλυθούν οι παρακάτω τύποι ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή:

i) $v = v_0 + \alpha t$, $\alpha \neq 0$ (ως προς το t)

ii) $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (ως προς το R_1).

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2(x - 4) + 2x(x - 4) + (x - 4) = 0.$

ii) $(x - 2)^2 - (2 - x)(4 + x) = 0.$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x^2 - 1) - x^3 + x^2 = 0$ **ii)** $(x + 1) + x^2 - 1 = 0$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4$ **ii)** $(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2).$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ **ii)** $x^3 - 2x^2 - (2x - 1)(x - 2) = 0.$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x - 1} = \frac{1}{x^2 - x}$ **ii)** $\frac{x + 1}{x^2 - 1} + \frac{2}{x^2 - 2x + 1} = 0$.

12. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} = \frac{2}{x^2 - 1}$ **ii)** $\frac{3}{x + 2} - \frac{2}{x} = \frac{x - 4}{x^2 + 2x}$

iii) $\frac{1}{x + 2} = \frac{x}{x^2 - 4}$ **iv)** $\frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \frac{x}{x + 1}$

13. Να βρείτε τρεις διαδοχικούς ακέραιους τέτοιους ώστε το άθροισμα τους να ισούται με το γινόμενο τους.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $|2x - 3| = 5$ **ii)** $|2x - 4| = |x - 1|$

iii) $|x - 2| = 2x - 1$ **iv)** $|2x - 1| = x - 2.$

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{|x|+4}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$ ii) $\frac{2|x|+1}{3} - \frac{|x|-1}{2} = \frac{1}{2}$

16. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\left|\frac{3-x}{3+x}\right| = 4$

ii) $|x-1||x-2| = |x-1|$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

i) $(x+\alpha)^2 - (x-\beta)^2 = 2\alpha(\alpha+\beta)$ ii) $\frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{x-\beta}{\alpha}$

έχουν πάντα λύση, οποιοιδήποτε και αν είναι οι πραγματικοί αριθμοί α, β.

2. Ποιοί περιορισμοί πρέπει να ισχύουν για τα $\alpha, \beta \in R$, ώστε να έχει λύση η εξίσωση $\frac{x}{\alpha} - \frac{x}{\beta} = 1$;

3. Πόσο καθαρό οινόπνευμα πρέπει να προσθέσει ένας φαρμακοποιός σε 200ml διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 15%, για να πάρει διάλυμα οινοπνεύματος περιεκτικότητας 32%;

4. Ένα αυτοκίνητο Α κινείται με 100km/h. Ένα δεύτερο αυτοκίνητο Β που κινείται με 120km/h προσπερνάει το Α. Σε πόσα λεπτά τα δυο αυτοκίνητα θα απέχουν 1km;

5. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2}$ για όλες τις τιμές του $\alpha \in R$.

6. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = x^2 + 4$$

7. Να λύσετε την εξίσωση $|2|x|-1| = 3$

8. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = |3x - 5|$

2.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^ν = α$

- Έστω η εξίσωση $x^3 = 8$. Όπως αναφέραμε στον ορισμό της ν-οστής ρίζας μη αρνητικού αριθμού, η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια θετική λύση, την $\sqrt[3]{8} = 2$. Η εξίσωση αυτή δεν έχει μη αρνητικές λύσεις, γιατί, για κάθε $x \le 0$ ισχύει $x^3 \le 0$.
  Επομένως η εξίσωση $x^3 = 8$ έχει ακριβώς μια λύση, την $\sqrt[3]{8}$.

  Γενικότερα:

  > Η εξίσωση $x^ν = α$, με **$α > 0$** και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[ν]{α}$.

- Έστω η εξίσωση $x^4 = 16$. Όπως και προηγουμένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια θετική λύση την $\sqrt[4]{16} = 2$. Η εξίσωση αυτή όμως έχει ως λύση και την $-\sqrt[4]{16} = -2$, αφού $\left(-\sqrt[4]{16}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{16}\right)^4 = 16$. Επομένως η εξίσωση $x^4 = 16$ έχει ακριβώς δύο λύσεις, την $\sqrt[4]{16} = 2$ και την $-\sqrt[4]{16} = -2$

  Γενικότερα:

  > Η εξίσωση $x^ν = α$, με **$α > 0$** και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις την $\sqrt[ν]{α}$ και $-\sqrt[ν]{α}$.

- Έστω η εξίσωση $x^3 = -8$ Έχουμε διαδοχικά:

$$x^3 = -8 \Leftrightarrow -x^3 = 8 \Leftrightarrow (-x)^3 = 8 \Leftrightarrow -x = \sqrt[3]{8} \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

Επομένως η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μια λύση, την $-\sqrt[3]{8} = -2$

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^ν = α$, με **α < 0** και **ν περιττό** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[ν]{|α|}$.

- Έστω η εξίσωση $x^4 = -4$. Επειδή για κάθε x ισχύει $x^4 \geq 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Γενικότερα:

Η εξίσωση $x^ν = α$, με **α < 0** και **ν άρτιο** φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

Από τα παραπάνω συμπεράσματα και από το γεγονός ότι η εξίσωση $x^ν = α^ν$, με $ν \in N$, έχει προφανή λύση την $x = α$, προκύπτει ότι:

- **Αν ο ν <u>περιττός</u> τότε η εξίσωση $x^ν = α^ν$ έχει μοναδική λύση, την $x = α$**
- **Αν ο ν <u>άρτιος</u> τότε η εξίσωση $x^ν = α^ν$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1 = α$ και $x_2 = -α$**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + 8x = 0$

ΛΥΣΗ

$$x^4 + 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 8) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x3 = -8$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\sqrt[3]{8} = -2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 - 125 = 0$ ii) $x^5 - 243 = 0$ iii) $x^7 - 1 = 0$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^3 + 125$ ii) $x^5 + 243 = 0$ iii) $x^7 + 1 = 0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 64$ ii) $x^4 - 81 = 0$ iii) $x^6 - 64 = 0$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^5 - 8x^2 = 0$ ii) $x^4 + x = 0$ iii) $x^5 + 16x = 0$

5. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο $81m^3$ και διαστάσεις x, x και 3x. Να βρείτε τις διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου.

6. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $(x + 1)^3 = 64$ ii) $1 + 125x^3 = 0$

iii) $(x - 1)^4 - 27(x - 1) = 0$

2.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0$

Η λύση πολλών προβλημάτων της Γεωμετρίας, της Φυσικής καθώς και άλλων επιστημών ανάγεται στην επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0 \qquad (1)$$

η οποία λέγεται εξίσωση **δευτέρου βαθμού.**

Για παράδειγμα, έστω ο τύπος $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$, όπου S το διάστημα που διανύει κινητό σε χρόνο t, με αρχική ταχύτητα v_0 και επιτάχυνση γ. Αν θεωρήσουμε ως άγνωστο τον χρόνο t, τότε προκύπτει η εξίσωση:

$$\frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t - S = 0,$$

η οποία είναι εξίσωση δευτέρου βαθμού.

Στη συνέχεια θα επιλύσουμε την εξίσωση δευτέρου βαθμού στη γενική της μορφή με τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου»**.

Έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \ [\text{αφού } \alpha \neq 0\,]$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \bullet \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \bullet \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = -\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{4\alpha^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\Delta}{4\alpha^2} \qquad (2)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:**

$$x + \frac{\beta}{2\alpha} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

δηλαδή

$$x = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Επομένως η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), έχει δύο λύσεις άνισες τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

Για συντομία οι λύσεις αυτές γράφονται

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\ .$$

- **Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση (2) γράφεται:**

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) \bullet \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \text{ή} \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα την $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

• **Αν $\Delta < 0$, τότε η εξίσωση (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι αδύνατη στο R.**

Η αλγεβρική παράσταση $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$, από την τιμή της οποίας εξαρτάται το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ονομάζεται διακρίνουσα αυτής.

Τα παραπάνω συμπεράσματα συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$
$\Delta > 0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.
$\Delta = 0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta < 0$	Είναι αδύνατη στο R .

Για παράδειγμα

✓ **Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 1 = 0$ έχει $\Delta = (-3)^2 - 4 \bullet 2 \bullet 1 = 1 > 0$, οπότε έχει δυο ρίζες τις $x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{1}}{2 \bullet 2} = 1$ και $x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{1}}{2 \bullet 2} = \dfrac{1}{2}$.**

✓ **Η εξίσωση $x^2 - 4x + 4 = 0$ έχει $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$, οπότε έχει μια διπλή ρίζα την $x = \dfrac{-(-4)}{2 \bullet 1} = 2$.**

Η παραπάνω εξίσωση λύνεται σύντομα ως εξής: $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (διπλή ρίζα).

✓ **Η εξίσωση $2x^2 - 3x + 4 = 0$ έχει**

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -23 < 0$, οπότε δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Στην περίπτωση που η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2, έχουμε:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} + \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} \cdot \frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{(-\beta)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$, τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

που είναι γνωστοί ως τύποι Vieta.

Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με την βοήθεια των τύπων του Vieta, μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

Η τελευταία μορφή της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ μας δίνει τη δυνατότητα να την κατασκευάσουμε, όταν γνωρίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της.

Για παράδειγμα η εξίσωση με άθροισμα ριζών 3 και γινόμενο $\sqrt{2}$ είναι η $x^2 - 3x + \sqrt{2} = 0$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 2(\sqrt{3} + 1)x + 4\sqrt{3} = 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα είναι:

$$\Delta = 4(\sqrt{3} + 1)^2 - 4 \bullet 4\sqrt{3} = 4\left[(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3} + 1\right] = 4(\sqrt{3} - 1)^2$$

Επομένως η εξίσωση έχει δυο ρίζες τις

$$x_{1,2} = \frac{2(\sqrt{3} + 1) \pm\sqrt{4(\sqrt{3} - 1)^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 2 \pm 2(\sqrt{3} - 1)}{2} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \\ 2 \end{cases}$$

2η Ένας βράχος βρίσκεται στην κορυφή της χαράδρας ενός ποταμού, η οποία έχει βάθος 300m. Πόσος χρόνος απαιτείται μέχρι τη στιγμή, που ο βράχος θα αγγίξει το νερό του ποταμού, αν ο βράχος

i) πέσει από την κορυφή;

ii) εκσφενδονιστεί κατακόρυφα προς τα κάτω με ταχύτητα 50 m/sec; Δίδεται ότι $g \simeq 10$ m/sec^2.

ΛΥΣΗ

i) Είναι γνωστό από την Φυσική ότι το διάστημα S που διανύει ένα σώμα στην ελεύθερη πτώση σε χρόνο t sec είναι: $S = \frac{1}{2}gt^2$

Επειδή S = 300m και $g \simeq 10 \frac{m}{sec^2}$

έχουμε:

$$\frac{1}{2}10t^2 = 300 \Leftrightarrow 5t^2 = 300 \Leftrightarrow t^2 = 60 \Leftrightarrow t = \pm\sqrt{60}$$

$$\Leftrightarrow t \simeq \pm 7{,}75$$

Η αρνητική ρίζα δεν είναι αποδεκτή, διότι ο χρόνος στο συγκεκριμένο πρόβλημα δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Άρα $t \simeq 7{,}75$sec .

ii) Όταν το σώμα έχει αρχική ταχύτητα v_0, το διάστημα που διανύει σε χρόνο t sec είναι: $S = v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2$

Επειδή $v_0 = 50 \frac{m}{sec}$ και $t > 0$ θα έχουμε :

$$\frac{1}{2}10t^2 + 50t = 300 \Leftrightarrow 5t^2 + 50t - 300 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 10t - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-10 + \sqrt{100 + 4 \bullet 60}}{2}$$

$$\simeq \frac{-10 + 18{,}43}{2} = 4{,}22 \text{ sec.}$$

Άρα, ο ζητούμενος χρόνος είναι περίπου 4,22sec.

ΣΧΟΛΙΟ
Κατά την επίλυση ενός προβλήματος, όπως είδαμε και παραπάνω, δεν πρέπει να ξεχνάμε να ελέγχουμε, αν οι λύσεις που βρήκαμε είναι εύλογες.

Εξισώσεις που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού

Στη συνέχεια θα δούμε, με τη βοήθεια παραδειγμάτων, πώς μπορούμε να επιλύσουμε εξισώσεις οι οποίες δεν είναι μεν 2ου βαθμού, αλλά, με κατάλληλη διαδικασία, ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο:

Να λυθεί η εξίσωση

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή $x^2 = |x|^2$, η εξίσωση γράφεται:

$$|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$$

Αν θέσουμε $|x| = \omega$, τότε η εξίσωση γίνεται

$$\omega^2 - 2\omega - 3 = 0 .$$

Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = -1$. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 3$, που σημαίνει $x = -3$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο:

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3x - 1}{x - 1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x} .$$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει $x - 1 \neq 0$ και $x^2 - x \neq 0$, δηλαδή $x \neq 0$ και $x \neq 1$. Με αυτούς τους περιορισμούς του x έχουμε:

$$\frac{3x - 1}{x - 1} - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x} \Leftrightarrow x(x - 1)\frac{3x - 1}{x - 1} - x(x - 1)\frac{2}{x} =$$

$$= x(x - 1)\frac{2x^2 + x - 1}{x(x - 1)} \Leftrightarrow x(3x - 1) - (x - 1)2 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$. Από αυτές, λόγω του περιορισμού, δεκτή είναι μόνο η $x_2 = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο:
Να λυθεί η εξίσωση:

$$2x^4 - 7x^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

ΛΥΣΗ
Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται:

$$2y^2 - 7y - 4 = 0 \qquad (2)$$

Η εξίσωση $2y^2 - 7y - 4 = 0$ έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$
Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$.
Επομένως, οι ρίζες της (1) είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = 4$, δηλαδή οι $x_1 = -2$ και $x_2 = 2$.

ΣΧΟΛΙΟ
Η μέθοδος που ακολουθήσαμε στο παραπάνω παράδειγμα εφαρμόζεται και για την επίλυση κάθε εξίσωσης της μορφής:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0, \text{ με } \alpha \neq 0$$

Οι εξισώσεις της μορφής αυτής ονομάζονται διτετράγωνες εξισώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ii) $x^2 - 6x + 9 = 0$ iii) $3x^2 + 4x + 2 = 0$.

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^2 - 1{,}69 = 0$ ii) $0{,}5x^2 - x = 0$ iii) $3x^2 + 27 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν πραγματικές ρίζες:

i) $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$, $\lambda \neq 0$

ii) $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$

4. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in R$ για τις οποίες η εξίσωση $\mu x^2 + 2x + \mu = 0$, $\mu \neq 0$ έχει διπλή ρίζα.

5. Αν $\alpha \neq \beta$, να δείξετε ότι είναι αδύνατη στο R η εξίσωση $(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + 2(\alpha + \beta)x + 2 = 0$. Να εξετάσετε την περίπτωση που είναι $\alpha = \beta$.

6. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς

i) 2 και 3 ii) 1 και $\frac{1}{2}$ iii) $5 - 2\sqrt{6}$ και $5 + 2\sqrt{6}$.

7. Να βρείτε δυο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν

i) Άθροισμα 2 και γινόμενο -15 .

ii) άθροισμα 9 και γινόμενο 10.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^2 - (\sqrt{5} + \sqrt{3})x + \sqrt{15} = 0$ ii) $x^2 + (\sqrt{2} - 1)x - \sqrt{2} = 0$.

9. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + \alpha^2 = \beta^2 - 2\alpha x$, για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in R$.

10. Να βρείτε τις πλευρές ενός ορθογωνίου με περίμετρο 68cm και διαγώνιο 26cm.

11. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^2 - 7|x| + 12 = 0$ ii) $x^2 + 2|x| - 35 = 0$

iii) $x^2 - 8|x| + 12 = 0$.

12. Να λύσετε την εξίσωση $(x - 1)^2 + 4|x - 1| - 5 = 0$.

13. Να λύσετε την εξίσωση $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0$.

14. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $\frac{x}{x + 1} + \frac{x + 1}{x} = \frac{13}{6}$ ii) $\frac{2}{x} + \frac{2x - 3}{x - 2} + \frac{2 - x^2}{x^2 - 2x} = 0$.

15. Να λύσετε τις εξισώσεις

i) $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ ii) $4x^4 + 11x^2 - 3 = 0$

iii) $2x^4 + 7x^2 + 3 = 0$.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2x^2 - 2\alpha^3x + \alpha^4 - 1 = 0$, με $\alpha \neq 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 4\alpha^2$.

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι $\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha}$ και $\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$.

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (5 - \sqrt{2})x + 6 - 3\sqrt{2} = 0$.

i) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2$

ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι οι 3 και $2 - \sqrt{2}$.

3. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (\alpha - 9)x + \alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ έχει διπλή ρίζα.

4. Αν ο αριθμός ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, να δείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι η ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x}$, $\alpha \neq 0$

ii) $\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$, $\alpha, \beta \neq 0$

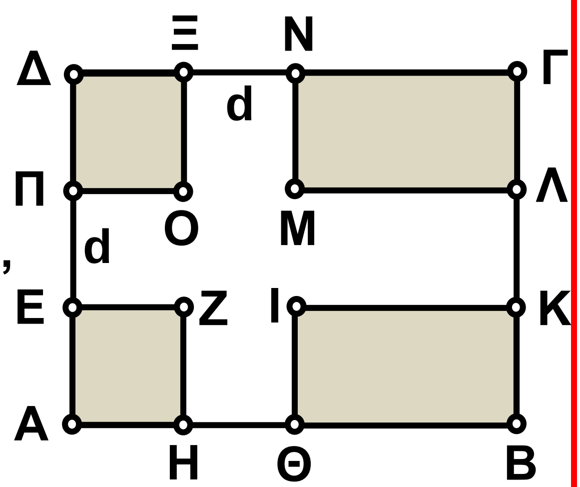
6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x - 8 = 0$

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in R$.

ii) Αν η μια ρίζα της εξίσωσης ισούται με το τετράγωνο της άλλης, τότε να βρεθούν οι ρίζες και η τιμή του λ.

7. Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που να είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

8. Η σημαία του διπλανού σχήματος έχει διαστάσεις 4m και 3m αντιστοίχως. Να βρείτε πλάτος d του σταυρού, αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του είναι ίσο με το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας.



9. Μια κατασκευαστική εταιρεία διαθέτει δυο μηχανήματα Α και Β. Το μηχάνημα Β χρειάζεται 12 ώρες περισσότερο από ότι το μηχάνημα Α για να τελειώσει ένα συγκεκριμένο έργο. Ο χρόνος που απαιτείται για να τελειώσει το έργο, αν χρησιμοποιηθούν και τα δυο μηχανήματα μαζί είναι 8 ώρες. Να βρείτε το χρόνο που θα χρειαζόταν το κάθε μηχάνημα για να τελειώσει το έργο αυτό αν εργαζόταν μόνο του.

10. Είναι γνωστό ότι μια ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + α = 0$ είναι ο αριθμός 1. Να βρείτε το α και να λύσετε την εξίσωση.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ. Διαφορετικά να κυκλώσετε το γράμμα Ψ.

1.	Η εξίσωση $(α - 1)x = α(α -1)$ έχει μοναδική λύση την $x = α$.	Α	Ψ
2.	Η εξίσωση $(\|x\| + 1)(\|x\| + 2) = 0$ είναι αδύνατη.	Α	Ψ
3.	Η εξίσωση $(\|x\| - 1)(\|x\| - 2\|) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες	Α	Ψ
4.	Η εξίσωση $(\|x\| - 1)(\|x\| + 2\|) = 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες	Α	Ψ
5.	Η εξίσωση $\|x\| = x - 2$ έχει μοναδική λύση.	Α	Ψ
6.	Η εξίσωση $\|x\| = 2 - x$ έχει μοναδική λύση.	Α	Ψ
7.	Αν οι συντελεστές α και γ της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ είναι ετερόσημοι, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.	Α	Ψ

8.	Αν δύο εξισώσεις 2ου βαθμού έχουν τις ίδιες ρίζες, τότε οι συντελεστές των ίσων δυνάμεων του x των εξισώσεων αυτών είναι ίσοι.	Α	Ψ
9.	Η εξίσωση $\alpha x^2 + 2x - \alpha = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.	Α	Ψ
10.	Η εξίσωση $x^2 - 4\alpha x + 4\alpha^2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.	Α	Ψ
11.	Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 - 2\alpha x + 2 = 0$, με $\alpha \neq 0$, δεν έχει πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ
12.	Η εξίσωση $2x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ
13.	Η εξίσωση $x^2 - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)x + 1 = 0$,με $\alpha \neq 0,1$ έχει δύο άνισες και αντίστροφες πραγματικές ρίζες.	Α	Ψ
14.	Οι εξισώσεις $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = 0$ και $x^2 - 3x + 2 = 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
15.	Οι εξισώσεις $\frac{2x^2 + 3x + 2}{x - 1} = 0$και $(2x^2 + 3x + 1) = 5(x^2 - 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
16.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S = -10 και γινόμενο P = 16 .	Α	Ψ
17.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S = 10 και γινόμενο P = 25	Α	Ψ
18.	Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x και y που να έχουν άθροισμα S = 2 και γινόμενο P = 2 .	Α	Ψ

ΙΙ Να εντοπίσετε το λάθος στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η εξίσωση $(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2)$ γράφεται ισοδύναμα:
$(2x - 1)(x + 2) = (3 - 2x)(x + 2) \Leftrightarrow 2x - 1 = 3 - 2x$
$\Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$
Όμως και ο αριθμός $x = -2$ επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

2. Η εξίσωση $|2x - 1| = x - 2$ γράφεται ισοδύναμα:
$|2x - 1| = x - 2 \Leftrightarrow 2x - 1 = x - 2$ ή
$2x - 1 = 2 - x \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1.$
Όμως καμία από τις τιμές αυτές του x δεν επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Από τα αρχαία χρόνια οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν διάφορες τεχνικές για να λύσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού.

Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους, ίσως λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς, αλλά και λόγω πρακτικών δυσκολιών που προέκυπταν από τα ελληνικά ψηφία.

Οι Ινδοί και οι Άραβες χρησιμοποίησαν μια μέθοδο όμοια με τη σημερινή διαδικασία «συμπλήρωσης τετραγώνου», περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων. Αυτοί θεωρούσαν ως διαφορετικού τύπου κάθε μία από τις εξισώσεις $x^2 + px = q$, $x^2 - px = q$, $x^2 - px = -q$.

Σήμερα όμως γράφουμε τις εξισώσεις αυτές με τη γενική μορφή $αx^2 + βx + γ = 0$

Ο σύγχρονος συμβολισμός άρχισε να εμφανίζεται περί το 1500 μ.Χ, και οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τούς Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Όμως η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

που δίνει τις ρίζες της γενικής εξίσωσης 2ου βαθμού

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0\ .$$

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τρεις μεθόδους επίλυσης μίας εξίσωσης 2ου βαθμού.

<u>Μέθοδος των Ινδών</u>

Η επίλυση αυτή που επινοήθηκε στην Ινδία, αποδίδεται στον Sridhara (1025 μ. Χ. περίπου). Έχουμε διαδοχικά:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$

$\alpha x^2 + \beta x = -\gamma$

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 4α και ύστερα προσθέτουμε το β^2 και στα δύο μέλη, για να προκύψει ένα «τέλειο» τετράγωνο στο αριστερό μέλος. Δηλαδή

$4\alpha^2x^2 + 4\alpha\beta x = -4\alpha\gamma$

$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$(2\alpha x + \beta)^2 = \beta^2 - 4\alpha\gamma$

$2\alpha x + \beta = \pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$**, εφόσον** $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$.

Έτσι προκύπτει ότι:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Σχόλιο: Η απλότητα της μεθόδου των Ινδών χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι το κλάσμα δεν εμφανίζεται. παρά μόνο στο τελευταίο βήμα.

<u>Μέθοδος του Vieta</u>

Η εξίσωση 2ου βαθμού

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ μπορεί να λυθεί ευκολότερα, αν δεν περιέχει τον πρωτοβάθμιο όρο βx, πράγμα που μπορεί εύκολα να επιτευχθεί με την αντικατάσταση

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} \qquad (1)$$

Τότε η εξίσωση γίνεται: $\alpha\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(y - \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = 0$

η οποία όταν απλοποιηθεί γίνεται:

$$\alpha y^2 + \frac{-\beta + 4\alpha\gamma}{4\alpha} = 0 \ .$$

Οι ρίζες της εξίσωσης αυτής είναι $y = \frac{\pm\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$

εφόσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$

Για να βρούμε τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης αντικαθιστούμε την παραπάνω τιμή του y στην (1) και έχουμε:

$$x = y - \frac{\beta}{2\alpha} = \pm\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}$$

Οπότε

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \ .$$

<u>Σχόλιο:</u> **Η μέθοδος αυτή του Vieta είναι ενδιαφέρουσα, γιατί είναι ο προάγγελος της τεχνικής για την επίλυση της γενικής τριτοβάθμιας καθώς και της διτετράγωνης εξίσωσης. Για παράδειγμα, το πρώτο βήμα στην επίλυση της εξίσωσης $\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, είναι η αντικατάσταση $x = y - \frac{\beta}{3\alpha}$ που απαλλάσσει την εξίσωση από το δευτεροβάθμιο όρο.**

<u>Μέθοδος του Harriot</u>

Ο μαθηματικός Thomas Harriot (1560-1621) εφάρμοσε τη μέθοδο της παραγοντοποίησης, για να βρει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2ου βαθμού, στο μεγάλο έργο του για την άλγεβρα «Artis Analytical Praxis». Η τεχνική του είναι η εξής περίπου:

Υποθέτουμε ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,\ \alpha \neq 0 \qquad (1).$$

Σχηματίζουμε τώρα μία εξίσωση με ρίζες x_1 και x_2 .

Αυτή είναι η $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ ή ,ισοδύναμα, η

$$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = 0 \qquad (2)$$

Με διαίρεση των μελών της (1) με $\alpha \neq 0$, βρίσκουμε:

$$x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{\gamma}{\alpha} = 0 \qquad (3)$$

Επειδή οι εξισώσεις (2) και (3) είναι ίδιες, οι αντίστοιχοι συντελεστές πρέπει να είναι ίσοι. Επομένως:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha} \qquad (4)$$

Η ταυτότητα $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ σε

συνδυασμό με την (4) δίνει $x_1 - x_2 = \pm\dfrac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{\alpha}$ **,**
[εφόσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$**]** **(5)**

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (4) και (5) έχουμε:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Σχόλιο: Είναι αρκετό να θεωρήσουμε μόνο τη θετική τετραγωνική ρίζα της (5). Η αρνητική ρίζα απλώς εναλλάσσει τη διάταξη των x_1 **και** x_2 **.**

3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

3.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

Οι ανισώσεις: αx + β > 0 και αx + β < 0

Γνωρίσαμε στο Γυμνάσιο τη διαδικασία επίλυσης μιας ανίσωσης της μορφής αx + β > 0 ή της μορφής αx + β < 0 , με α και β συγκεκριμένους αριθμούς. Γενικότερα έχουμε:

$$\alpha x + \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha x + \beta - \beta > -\beta$$
$$\Leftrightarrow \alpha x > -\beta$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- **Αν α > 0, τότε:**

$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} > \frac{-\beta}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow x > \frac{-\beta}{\alpha}$$

- **Αν α < 0, τότε:**

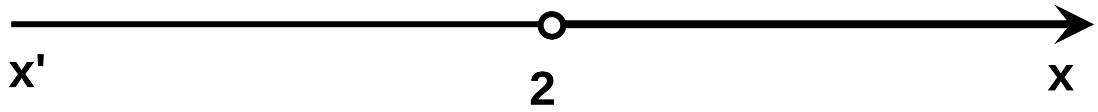
$$\alpha x > -\beta \Leftrightarrow \frac{\alpha x}{\alpha} < \frac{-\beta}{\alpha}$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{-\beta}{\alpha}$$

- **Αν α = 0, τότε η ανίσωση γίνεται 0x > -β, η οποία**
  - ✓ **αληθεύει για κάθε $x \in R$, αν είναι β > 0, ενώ**
  - ✓ **είναι αδύνατη, αν είναι β < 0 .**

  Για παράδειγμα:
- **Η ανίσωση 4x > 8 γράφεται:**

$$4x > 8 \Leftrightarrow x > \frac{8}{4} \Leftrightarrow x > 2 .$$

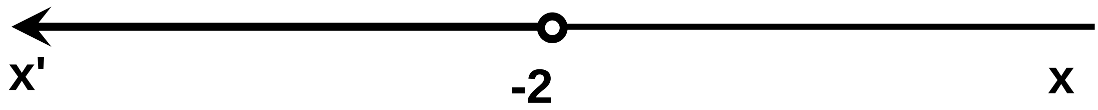
Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (2, +\infty)$



• Η ανίσωση $-4x > 8$ γράφεται:

$$-4x > 8 \Leftrightarrow x < -\frac{8}{4} \Leftrightarrow x < -2 \ .$$

Επομένως η ανίσωση αυτή αληθεύει για $x \in (-\infty, -2)$.



• Η ανίσωση $0x > -2$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, ενώ η ανίσωση $0x > 2$ είναι αδύνατη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

i) Να λυθούν οι ανισώσεις:

$$2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x \quad \text{και}$$

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x)$$

ii) Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων.

ΛΥΣΗ

i) Για την πρώτη ανίσωση έχουμε:

$$\begin{aligned} 2(x + 4) - (x + 6) < 12 - x &\Leftrightarrow 2x + 8 - x - 6 < 12 - x \\ &\Leftrightarrow 2x - x + x < 12 + 6 - 8 \\ &\Leftrightarrow 2x < 10 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x}{2} < \frac{10}{2} \\ &\Leftrightarrow x < 5 \ . \end{aligned}$$

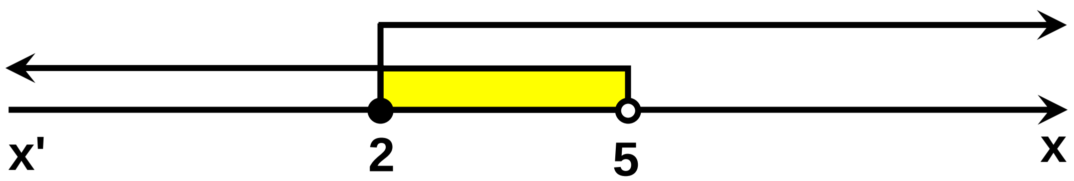
Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x < 5$.

Για τη δεύτερη ανίσωση έχουμε:

$$2x + \frac{x}{6} + \frac{5}{3} \geq 2(1 + x) \Leftrightarrow 12x + x + 10 \geq 12(1 + x)$$
$$\Leftrightarrow 12x + x + 10 \geq 12 + 12x$$
$$\Leftrightarrow x \geq 2.$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 2$

ii) Επειδή η πρώτη ανίσωση αληθεύει για $x < 5$ και η δεύτερη για $x \geq 2$, οι ανισώσεις συναληθεύουν για κάθε πραγματικό αριθμό x με $2 \leq x \leq 5$, δηλαδή οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν $x \in [2,5)$.
Για τον προσδιορισμό των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων μας διευκολύνει να παραστήσουμε τις λύσεις τους στον ίδιο άξονα (Σχήμα), απ' όπου προκύπτει ότι $2 \leq x \leq 5$



Ανισώσεις με απόλυτες τιμές

Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής και της έννοιας της απόστασης δύο αριθμών, μπορού-με να επιλύουμε ανισώσεις που περιέχουν απόλυτες τιμές. Στη συνέχεια θα δούμε μερικά παραδείγματα επίλυσης τέτοιων ανισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο
Να λυθεί η ανίσωση: $|x - 2| < 3$.

ΛΥΣΗ
Η επίλυση της ανίσωσης $|x - 2| < 3$, με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

γίνεται ως εξής:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow 2 - 3 < x < 2 + 3$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 5$$

Μπορούμε όμως να λύσουμε την παραπάνω ανίσωση και με τη βοήθεια της ιδιότητας

$$|x| < \rho \Leftrightarrow -\rho < x < \rho$$

ως εξής:

$$|x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3$$
$$\Leftrightarrow -3 + 2 < x - 2 + 2 < 3 + 2$$
$$\Leftrightarrow -1 < x < 5 .$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-1,5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση: $|2x - 1| > 5$

ΛΥΣΗ

Από την ιδιότητα $|x| > \rho \Leftrightarrow x < -\rho$ ή $x > \rho$ έχουμε :

$$|2x - 1| > 5 \Leftrightarrow 2x - 1 < -5 \text{ ή } 2x - 1 > 5$$
$$\Leftrightarrow 2x < -4 \text{ ή } 2x > 6$$
$$\Leftrightarrow x < -2 \text{ ή } x > 3$$

Άρα η ανίσωση αληθεύει για $x \in (-\infty,-2) \cup (3,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\dfrac{x - 1}{2} + \dfrac{2x + 3}{4} < \dfrac{x}{6}$ ii) $\dfrac{x - 12}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} > x$

iii) $\dfrac{x - 2}{2} + \dfrac{1 - 2x}{5} < \dfrac{x}{10} - \dfrac{2}{5}$

2. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις

$3x - 1 < x + 5$ και $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

3. Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \text{ και } x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1 .$$

4. Να βρείτε τα $x \in Z$ για τα οποία συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$2x - \frac{x-1}{8} > x \quad \text{και} \quad x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 .$$

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| < 3$ ii) $|x - 1| \leq 4$ iii) $|2x + 1| < 5$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $|x| \geq 3$ ii) $|x - 1| > 4$ iii) $|2x + 1| \geq 5$.

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $|2x - 6| = 2x - 6$ ii) $|3x - 1| = 1 - 3x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3}$ ii) $\frac{|x|+1}{2} - \frac{2|x|}{3} > \frac{1-|x|}{3}$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 5$

10. Να βρείτε την ανίσωση της μορφής $|x - x_0| < \rho$, που έχει ως λύσεις τους αριθμούς του διαστήματος $(-7,3)$.

11. Η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Κελσίου (^oC) με τους βαθμούς Φαρενάϊτ (^{o}F) είναι η $F = \frac{9}{5}C + 32$.

Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 41^{o}F μέχρι 50^{o}F. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^{o}C.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $3 \le 4x - 1 \le 6$ ii) $-4 \le 2 - 3x \le -2$.

2. Να βρείτε τις τιμές x για τις οποίες ισχύει:

i) $2 \le |x| \le 4$ ii) $2 \le |x - 5| \le 4$.

3. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς -3 και 5 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 5| \le |x + 3|$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας.

4. Έστω Α και Β τα σημεία που παριστάνουν σε έναν άξονα τους αριθμούς 1 και 7 και Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ.

i) Ποιος αριθμός αντιστοιχεί στο σημείο Μ;

ii) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $|x - 1| + |x - 7| = 6$ και να βρείτε τις λύσεις της.

iii) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα συμπεράσματά σας, αφού προηγουμένως συντάξετε πίνακα προσήμου των παραστάσεων $x - 1$ και $x - 7$.

3.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

Μορφές τριωνύμου

Η παράσταση $αx^2 + βx + γ$, $α = 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού ή, πιο απλά, τριώνυμο. Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$ λέγεται και διακρίνουσα του τριωνύμου. Οι ρίζες της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$, δηλαδή οι

$$x_1 = \frac{-β + \sqrt{Δ}}{2α} \quad \text{και} \quad x_2 = \frac{-β - \sqrt{Δ}}{2α}$$

ονομάζονται και ρίζες του τριωνύμου.

Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} αx^2 + βx + γ &= α\left(x^2 + \frac{β}{α}x + \frac{γ}{α}\right) \\ &= α\left[x^2 + 2 \bullet x \bullet \frac{β}{2α} + \left(\frac{β}{2α}\right)^2 + \frac{γ}{α}\right] \\ &= α\left[\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 + \frac{4αγ - β^2}{4α^2}\right]. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$αx^2 + βx + γ = α\left[\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 - \frac{Δ}{4α^2}\right] \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

• **$Δ > 0$. Τότε ισχύει $Δ = (\sqrt{Δ})^2$, οπότε έχουμε:**

$$\begin{aligned} αx^2 + βx + γ &= α\left[\left(x + \frac{β}{2α}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)^2\right] \\ &= α\left(x + \frac{β}{2α} - \frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right)\left(x + \frac{β}{2α} + \frac{\sqrt{Δ}}{2α}\right) \end{aligned}$$

$$= \alpha\left[x - \left(\frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-\beta - \sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)\right].$$

Επομένως:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2)\ ,$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

Άρα, όταν $\Delta > 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

• $\Delta = 0$. Τότε από την ισότητα (1) έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 .$$

Άρα, όταν $\Delta = 0$, τότε το τριώνυμο μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί ένα τέλειο τετράγωνο.

• $\Delta < 0$. Τότε ισχύει $|\Delta| = -\Delta$, οπότε έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Επειδή για κάθε $x \in R$, η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική, το τριώνυμο δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.
Συνοψίζοντας τα παραπάνω συμπεράσματα για τις μορφές του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με διακρίνουσα Δ έχουμε:

• Αν $\Delta > 0$,τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - x_1)(x - x_2),$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν Δ = 0, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν Δ < 0, τότε:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right]$$

Για παράδειγμα:

✓ Το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 2$ έχει $\Delta = 9 + 16 = 25 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = -2$. Επομένως:

$$2x^2 + 3x - 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = (2x - 1)(x + 2).$$

✓ Το τριώνυμο $\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2}$ έχει $\Delta = 9 - 4 \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{9}{2} = 0$ και $\frac{\beta}{2\alpha} = -3$. Επομένως:

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2.$$

✓ Το τριώνυμο $2x^2 - 6x + 5$ έχει $\Delta = -4 < 0$. Επομένως:

$$2x^2 - 6x + 5 = 2\left[\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right].$$

Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου

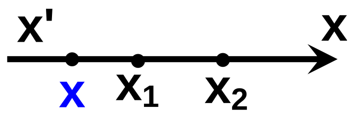
Για να μελετήσουμε το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, θα χρησιμοποιήσουμε τις μορφές του ανάλογα με τη διακρίνουσα.

- Αν Δ > 0, τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, ισχύει:

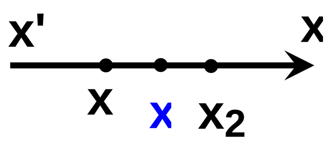
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\,(x - x_1)(x - x_2) \quad (1)\ .$$

Υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$ και τοποθετούμε τις ρίζες σε έναν άξονα.

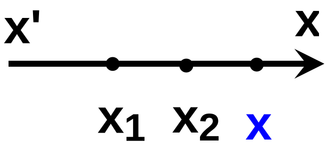
✓ Αν $x < x_1 < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 < 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α .



✓ Αν $x_1 < x < x_2$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) < 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ετερόσημο του α .



✓ Αν $x_1 < x_2 < x$ (Σχήμα), τότε $x - x_1 > 0$ και $x - x_2 > 0$, οπότε $(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Επομένως, λόγω της (1), το τριώνυμο είναι ομόσημο του α .



• Αν **Δ = 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\ .$$

Επομένως, το τριώνυμο είναι ομόσημο του α για κάθε πραγματικό $x \neq -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, ενώ μηδενίζεται για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

• Αν **Δ < 0**, τότε ισχύει:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Όμως η παράσταση μέσα στην αγκύλη είναι θετική για κάθε πραγματικό αριθμό x. Επομένως το τριώνυμο είναι ομόσημο του α σε όλο το R.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον πίνακα:

Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ γίνεται:
• **Ετερόσημο** του α , μόνο όταν είναι $Δ > 0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
• **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
• **Ομόσημο** του α σε κάθε άλλη περίπτωση.

Ανισώσεις της μορφής $αx^2 + βx + γ > 0$ ή $αx^2 + βx + γ < 0$

Τα προηγούμενα συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $αx^2 + βx + γ > 0$ ή $αx^2 + βx + γ < 0$, $α \neq 0$, τις οποίες ονομάζουμε **ανισώσεις δευτέρου βαθμού**. Ο τρόπος επίλυσης αυτών φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

i) $2x^2 - 3x - 2 > 0$ ii) $2x^2 - 3x - 2 < 0$

ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$ είναι θετικό στην περίπτωση (i) και αρνητικό στην περίπτωση (ii).

Το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $-\frac{1}{2}$ και 2 και, επειδή $α = 2 > 0$, το πρόσημό του φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

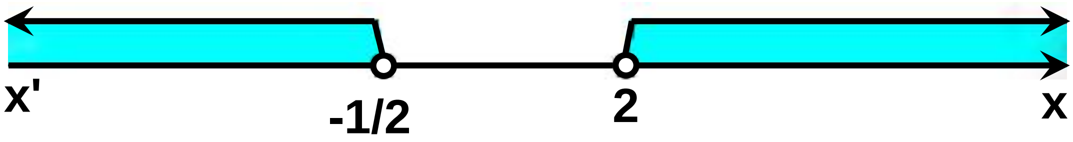
x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα αυτόν προκύπτει ότι:

i) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 > 0$ έχει λύσεις τα $x \in R$ για τα οποία ισχύει

$x < -\frac{1}{2}$ ή $x > 2$, δηλαδή τα $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)$.

Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 < 0$ έχει λύσεις τα $x \in R$ για τα οποία ισχύει $-\frac{1}{2} < x < 2$, δηλαδή τα $x \in \left(-\frac{1}{2}, 2\right)$.

Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ο

Να λυθεί η ανίσωση $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

ΛΥΣΗ

Ζητάμε τις τιμές του x, που είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 < 0$ ή ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 3x - 2 = 0$. Επομένως σύμφωνα με το 1ο παράδειγμα οι λύσεις της

ανίσωσης $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ είναι τα $x \in R$, με $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, δηλαδή τα $x \in \left[-\frac{1}{2}, 2\right]$. Οι λύσεις αυτές εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ο

Να λυθούν οι ανισώσεις

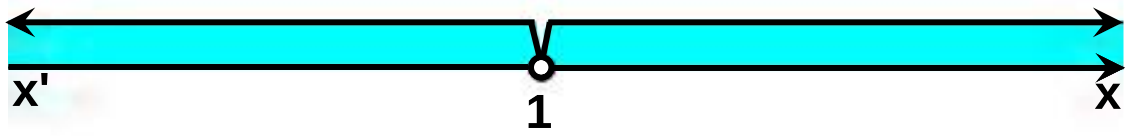
i) $x^2 - 2x + 1 > 0$ ii) $x^2 - 2x + 1 < 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 - 2x + 1$ είναι $\Delta = 0$, οπότε έχει διπλή ρίζα την $x = 1$. Άρα το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in R$ με $x \neq 1$.

Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης (i) είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί x, με $x \neq 1$, ενώ η ανίσωση (ii) είναι αδύνατη.

Οι λύσεις της (i) εποπτικά φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο

Να λυθεί η ανίσωση $x^2 + x + 1 > 0$

ΛΥΣΗ

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $x^2 + x + 1$ είναι $\Delta = -3 < 0$, οπότε το τριώνυμο είναι ομόσημο του $\alpha = 1$, δηλαδή θετικό, για κάθε $x \in R$. Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1η Να βρεθούν οι τιμές του $x \in R$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

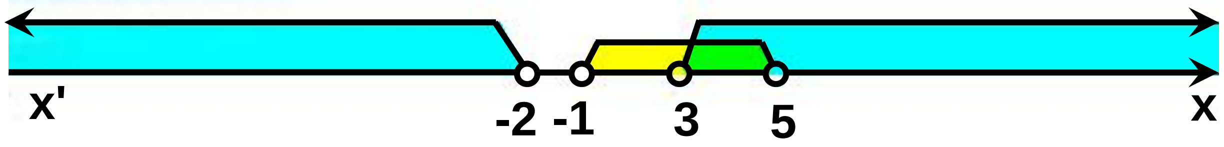
$$x^2 - 4x - 5 < 0 \text{ και } x^2 - x - 6 > 0.$$

ΛΥΣΗ

Λύνουμε κάθε ανίσωση χωριστά και μετά βρίσκουμε τις κοινές λύσεις Έχουμε:

✓ $x^2 - 4x - 5 < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 5$

✓ $x^2 - x - 6 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x < -2$ ή $x > 3$



Άρα οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (3,5)$.

2η Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha + 4 = 0, \ \alpha \in R$$

i) Να βρεθεί η διακρίνουσα της εξίσωσης και να μελετηθεί το πρόσημό της.

ii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες;

iii) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;

iv) Για ποιες τιμές του α η εξίσωση είναι αδύνατη στο R ;

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε:

$$\Delta = [-(\alpha + 1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha + 4) = \alpha^2 - 2\alpha - 15.$$

Παρατηρούμε ότι η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο του α με διακρίνουσα

$$\Delta' = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 64 > 0.$$

Επομένως η διακρίνουσα Δ έχει ρίζες:

$$\alpha_1 = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ και } \alpha_2 = \frac{2-8}{2} = -3.$$

και το πρόσημό της φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

α	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
Δ		+	0	-	0	+	

Από τον πίνακα αυτό προκύπτει ότι:

ii) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες αν $\Delta > 0$, δηλαδή αν $\alpha < -3$ ή $\alpha > 5$.

iii) Η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα αν $\Delta = 0$, δηλαδή αν $\alpha = -3$ ή $\alpha = 5$.

iv) Η εξίσωση είναι αδύνατη αν $\Delta < 0$, δηλαδή $-3 < \alpha < 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα τριώνυμα:

i) $x^2 - 3x + 2$ ii) $2x^2 - 3x - 2$.

2. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x - 2}$ ii) $\dfrac{2x^2 + 8x - 42}{x^2 - 49}$ iii) $\dfrac{4x^2 - 12x + 9}{2x^2 - 5x + 3}$

3. Για τις διάφορες τιμές του $x \in$ M, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $x^2 - 2x - 15$ ii) $4x^2 - 4x + 1$ iii) $x^2 - 4x + 13$.

4. Για τις διάφορες τιμές του $x \in$ R, να βρείτε το πρόσημο των τριωνύμων:

i) $-x^2 + 4x - 3$ ii) $-9x^2 + 6x - 1$ iii) $-x^2 + 2x - 2$.

5. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $5x^2 \leq 20x$ ii) $x^2 + 3x \leq 4$.

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $x^2 - x - 2 > 0$ ii) $2x^2 - 3x - 5 < 0$.

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $x^2 + 4 > 4x$ ii) $x^2 + 9 \leq 6x$.

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:
i) $x^2 + 3x + 5 < 0$ ii) $2x^2 - 3x + 20 > 0$.

9. Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{1}{4}(x^2 - 4x + 3) > 0$.

10. Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες ισχύει:
$2x - 1 < x^2 - 4 < 12$.

11. Να βρείτε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $x^2 - 6x + 5 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 > 0$.

<u>Β' ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. i) Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παραστάσεις:

$$\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2 \text{ και } \alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2.$$

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{\alpha^2 + \alpha\beta - 2\beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - 6\beta^2}$.

2. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο

$$2x^2 + (2β - α)x - αβ.$$

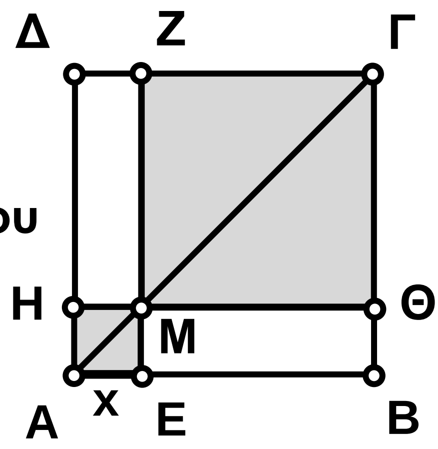
3. Να απλοποιήσετε την παράσταση $\dfrac{x^2 - αx + βx - αβ}{x^2 - 3αx + 2α^2}$.

4. Δίνεται η εξίσωση $λx^2 + 3λx + λ + 5 = 0$, $λ \in R$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση:
i) έχει ρίζες ίσες ii) έχει ρίζες άνισες
iii) είναι αδύνατη.

5. Να βρείτε τις τιμές του $λ \in R$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2 + 3λx + λ > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$.

6. Δίνεται το τριώνυμο $(λ + 2)x^2 - 2λx + 3λ$, $λ \neq -2$.
i) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση $Δ < 0$.
ii) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η ανίσωση $(λ + 2)x^2 - 2λx + 3λ < 0$, $λ \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in R$.

7. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Να βρείτε τις θέσεις του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ για τις οποίες το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5.



8. i) Να αποδείξετε ότι $α^2 - αβ + β^2 > 0$ για όλα τα $α, β \in R$ με $α, β \neq 0$.
ii) Να καθορίσετε το πρόσημο της παράστασης $A = \dfrac{α}{β} + \dfrac{β}{α} - 1$ για τις διάφορες τιμές των $α, β \neq 0$.

3.3 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟ & ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΗΛΙΚΟ

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x) = A(x) \cdot B(x) \cdot \dots \cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x)$, $B(x)$, … , $\Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x + \beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμα). Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του $P(x)$, όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in R$ το πρόσημο του γινομένου $P(x) = (x - 1)\ (x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

- **Επειδή**

  $$x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1,$$

  το $x - 1$ είναι θετικό για $x > 1$, μηδέν για $x = 1$ και αρνητικό για $x < 1$.
- **Επειδή**

  $$x^2 + x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ ή } x \geq 2,$$

  το $x^2 + x - 6$ είναι θετικό για $x < -3$ και για $x > 2$, μηδέν για $x = -3$ και για $x = 2$ και αρνητικό για $-3 < x < 2$.
- **Επειδή το $2x^2 + x + 1$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x \in R$.**

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου $P(x)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
x -1		-	|	-	0	+	|	+	
$x^2 + x - 6$		+	0	-	|	-	0	+	
$2x^2 + x + 1$		+	|	+	|	+	|	+	
P(x)		-	0	+	0	-	0	+	

Ώστε το γινόμενο P(x) είναι θετικό για $-3 < x < 1$ και για $x > 2$, ενώ είναι αρνητικό για $x < -3$ και για $1 < x < 2$. Τέλος είναι μηδέν για $x = -3$, για $x = 1$ και για $x = 2$.

Ανισώσεις της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0\ (< 0)$

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x) \cdot B(x) \cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0\ (< 0)$, όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$$(x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1) < 0$$

Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in R$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x) = (x - 1)(x^2 + x - 6)(2x^2 + x + 1)$ είναι αρνητικό.
Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του P(x) διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -3) \cup (1,2)$.

Ανισώσεις της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0\ (<0)$

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα. Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0 \quad \text{και} \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) < 0$$

αφού, καμία από τις λύσεις της $A(x) \cdot B(x) > 0$ και της $A(x) \cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.
Για παράδειγμα , έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1) > 0,$$

δηλαδή με την $P(x) > 0$, η οποία, από τον πίνακα προσήμου του $P(x)$ αληθεύει όταν $x \in (-3,1) \cup (2, +\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής $\frac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x) \cdot B(x) > 0 \text{ και } B(x) \neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0$. Έχουμε:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow (x^2-4x+3)(x^2+3x-4) > 0 \text{ και}$$

$$x^2+3x-4 \neq 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ είναι οι 1 και 3, ενώ του τριωνύμου $x^2 + 3x - 4$ είναι οι 1 και -4.
Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:

$$P(x) = (x^2-4x+3)(x^2+3x-4)$$

x	$-\infty$ $\quad$ -4 $\quad$ 1 $\quad$ 3 $\quad$ $+\infty$
$x^2 - 4x + 3$	$+ \quad \vert \quad + \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$
$x^2 + 3x - 4$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad + \quad \vert \quad +$
$P(x)$	$+ \quad \vert \quad - \quad \vert \quad - \quad \vert \quad +$

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty, -4) \cup [3, +\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1) .$$

2. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου

$$P(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1) .$$

3. Να λύσετε την ανίσωση $(x - 1)(x^2 + 2)(x^2 - 9) > 0$.

4. Να λύσετε την ανίσωση $(3 - x)(2x^2 + 6x)(x^2 + 3) \leq 0$.

5. Να λύσετε την ανίσωση $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0$.

6. Να λύσετε την ανίσωση

$$(x - 3)(2x^2 + x - 3)(x - 1 - 2x^2) > 0 .$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x - 2}{x + 1} > 0$ ii) $\frac{2x + 1}{x - 3} \leq 0$.

8. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} \leq 0$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{2x + 3}{x - 1} > 4$ ii) $\frac{x - 2}{3x + 5} \leq 4$.

2. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^2 - 3x - 10}{x - 1} + 2 \leq 0$.

3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x}{3x - 5} \leq \frac{2}{x - 1}$ ii) $\frac{x}{2x - 1} \geq \frac{3}{x + 2}$

4. Να λύσετε την ανίσωση $\left|\frac{x + 1}{x}\right| > 2$.

5. Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος Κ και τα αντίστοιχα έσοδα Ε (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους $K = 7 - x$ και $E = 5x - x^2$. Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες η εταιρεία έχει κέρδος.

6. Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο $\sigma = \dfrac{20t}{t^2 + 4}$ mgr/lt . Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι 4 mgr /lt, να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Ι. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Αν η ανίσωση $-x^2 + 2x + \gamma > 0$ είναι αδύνατη τότε:
Α) $\gamma > -1$ Β) $\gamma = -1$ Γ) $\gamma < -1$ Δ) $\gamma \geq -1$.

2. Αν η ανίσωση $x^2 - 2x + \gamma > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε:
Α) $\gamma < 1$ Β) $\gamma = 1$ Γ) $\gamma > 1$ Δ) $\gamma \leq 1$.

3. Αν η ανίσωση $-2x^2 + 3\lambda x - \lambda^2 \leq 0$ αληθεύει για κάθε $x \in R$, τότε:
Α) $\lambda > 0$ Β) $\lambda < 0$ Γ) $\lambda = 1$ Δ) $\lambda = 0$.

4. Η εξίσωση $|x - 1| + |x - 5| = 4$ αληθεύει αν και μόνο αν:
Α) $x < 1$ Β) $x > 5$ Γ) $1 \leq x \leq 5$ Δ) $1 < x < 5$.

5. Η εξίσωση $|x - 1| = x - 1$:
Α) Είναι αδύνατη Β) Έχει μοναδική λύση τη $x = 1$
Γ) Έχει άπειρες λύσεις Δ) Είναι ταυτότητα.

ΙΙ. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Α, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Ψ, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1.	Η ανίσωση $x^2 + \lambda x + \lambda^2 > 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα x R.	Α	Ψ
2.	Η ανίσωση $\lambda^2 x^2 + 4\lambda x + 5 \leq 0$ με $\lambda \neq 0$, αληθεύει για όλα τα $x \in R$ είναι αδύνατη.	Α	Ψ
3.	Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \geq 0$ και $x - 1 > 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
4.	Οι ανισώσεις $x^2(x - 1) \leq 0$ και $x - 1 \leq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
5.	Οι ανισώσεις $\frac{2x - 1}{x + 1} > 1$ και $2x - 1 > x + 1$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
6.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 1}{(x - 2)^2} \geq 1$ και $x - 1 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
7.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 1}{(x - 2)^2} \geq 1$ και $(x - 1)(x - 2)^2 \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
8.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 2}{x - 1} \geq 0$ και $(x - 2)(x - 1) \geq 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ
9.	Οι ανισώσεις $\frac{x - 2}{x - 1} < 0$ και $(x - 2)(x - 1) < 0$ έχουν τις ίδιες λύσεις	Α	Ψ
10.	Οι ανισώσεις $\frac{x + 1}{x - 1} < \frac{x + 2}{x + 1}$ και $(x + 1)^2 < (x - 1)(x + 1)$ έχουν τις ίδιες λύσεις.	Α	Ψ

III. Να αντιστοιχίσετε καθένα από τα τριώνυμα της Α' ομάδας με την ισοδύναμη μορφή του από τη Β' ομάδα.

Α' ΟΜΑΔΑ	
1	$-2x^2 + 6x - 4$
2	$x^2 - 3x + 2$
3	$-x^2 + 3x - 2$
4	$2x^2 - 6x + 4$

Β' ΟΜΑΔΑ	
Α	$(x-1)(x-2)$
Β	$-(x-1)(x-2)$
Γ	$2(x-1)(x-2)$
Δ	$-2(x-1)(x-2)$

IV. Να εντοπίσετε το <u>λάθος</u> στους παρακάτω συλλογισμούς:

1. Η ανίσωση $(2x - 6)(x - 1) > 0$ γράφεται ισοδύναμα:
$(2x - 6)(x - 1) > 0 \Leftrightarrow 2x - 6 > 0$ και $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ και $x > 1 \Leftrightarrow x > 3$.
Όμως ο αριθμός 0, αν και είναι μικρότερος του 3, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

2. Η ανίσωση $x < \frac{4}{x}$ γράφεται ισοδύναμα:
$x < \frac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.
Όμως ο αριθμός -1, αν και είναι μεταξύ του -2 και του 2, <u>δεν επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

3. Η ανίσωση $(x + 2)^2(x - 1) \geq 0$ γράφεται ισοδύναμα:
$(x + 2)^2(x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
Όμως ο αριθμός -2, αν και είναι μικρότερος του 1, <u>επαληθεύει</u> τη δοθείσα ανίσωση.

4 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

4.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εισαγωγή

Σε πολλά καθημερινά φαινόμενα εμφανίζονται δύο μεγέθη, τα οποία μεταβάλλονται έτσι, ώστε η τιμή του ενός να καθορίζει την τιμή του άλλου. Η διαδικασία με την οποία κάθε τιμή του ενός μεγέθους αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του άλλου μεγέθους, πολλές φορές περιγράφεται από ένα μαθηματικό τύπο, όπως φαίνεται στα παρακάτω παραδείγματα.

1. **Ο τόκος Τ σε ευρώ που αποδίδει κεφάλαιο 5000 ευρώ σε ένα έτος με ετήσιο επιτόκιο ε%, δίνεται κατά τα γνωστά από τον τύπο $T = 5000\frac{ε}{100}$.**

   Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ε αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Τ. Για παράδειγμα, αν $ε = 3$ τότε $T = 150$, ενώ αν $ε = 5$, τότε $T = 250$ κτλ.

2. **Το διάστημα S σε km που διανύθηκε από ποδηλάτη σε χρονικό διάστημα 2h, με μέση ταχύτητα υ σε km/h, δίνεται από τον τύπο $S = 2υ$. Ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του υ αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του S. Για παράδειγμα, αν $υ = 60$, τότε $S = 120$, ενώ αν $υ = 70$, τότε $S = 140$, κτλ.**

3. **Το εμβαδό Ε ενός κύκλου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο $E = πρ^2$. Ομοίως και ο τύπος αυτός περιγράφει μια διαδικασία, με την οποία κάθε τιμή του ρ**

αντιστοιχίζεται σε μια ακριβώς τιμή του Ε. Για παράδειγμα αν ρ = 1, τότε Ε = π, ενώ αν ρ = 2, τότε Ε = 4π κτλ.

Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου η διαδικασία αντιστοίχισης ανάμεσα στις τιμές δύο μεγεθών δεν περιγράφεται ή έστω δεν γνωρίζουμε αν περιγράφεται από κάποιο τύπο. Για παράδειγμα:

- ✓ Οι ώρες της ημέρας και οι αντίστοιχες θερμοκρασίες τους.
- ✓ Οι μέρες του έτους και οι τιμές ενός ξένου νομίσματος (π.χ. του δολαρίου).

Παρατηρούμε ότι σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει κάποια διαδικασία, με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β. Μια τέτοια διαδικασία λέγεται συνάρτηση από το Α στο Β. Δηλαδή:

ΟΡΙΣΜΟΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** ή **σύνολο ορισμού** της f .

Οι συναρτήσεις παριστάνονται συνήθως με τα μικρά γράμματα f, g, h κτλ. του Λατινικού αλφαβήτου.
Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε:

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε «y ίσον f του x». Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της f στο x**. Το γράμμα x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x, ονομάζεται **εξαρτημένη μεταβλητή.**

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται **σύνολο τιμών** της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\to f(x) \end{aligned}$$

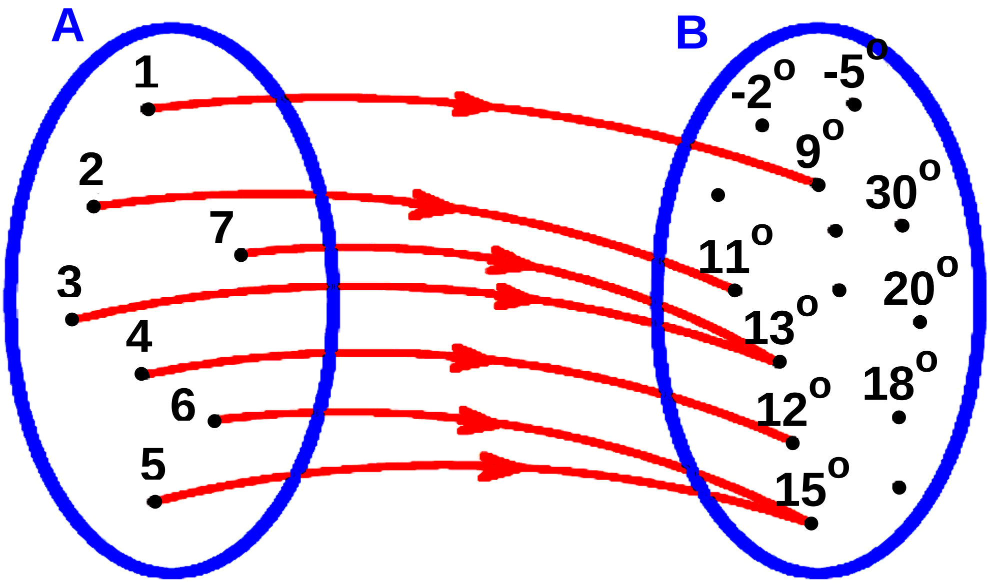
Έτσι π.χ. η συνάρτηση f με την οποία κάθε μη αρνητικός αριθμός αντιστοιχίζεται στην τετραγωνική του ρίζα, συμβολίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned} f : [0, +\infty) &\to R \\ x &\to \sqrt{x} \end{aligned}$$

Για καλύτερη κατανόηση του παραπάνω ορισμού ας δούμε τα παραδείγματα που ακολουθούν:

1ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω f η συνάρτηση με την οποία κάθε ημέρα μιας ορισμένης εβδομάδας ενός μήνα αντιστοιχίζεται στην υψηλότερη θερμοκρασία της.



Για τη συνάρτηση αυτή, το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$

ενώ το σύνολο τιμών το σύνολο

$$f(A) = \{9^\circ, 11^\circ, 12^\circ, 13^\circ, 15^\circ\} \subseteq B$$

Με αφορμή το παράδειγμα αυτό τονίζουμε τα ακόλουθα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης $f : A \longrightarrow B$.

- **Κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.**
- **Μερικά στοιχεία του Β μπορεί να μην αποτελούν τιμές της f (π.χ. 18°).**
- **Δύο ή περισσότερα στοιχεία του Α μπορεί να αντιστοιχίζονται στο ίδιο στοιχείο του Β (π.χ. τα 3 και 7 αντιστοιχίζονται στο 13°).**

2ο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

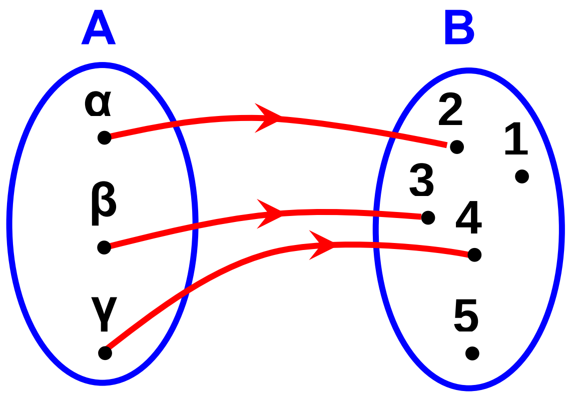
Θεωρούμε τα σύνολα Α = {α, β, γ} και Β = {1, 2, 3, 4, 5}, καθώς επίσης και τα παρακάτω σχήματα (βελοδιαγράμματα). Παρατηρούμε ότι:

✓ **Το σχήμα (α) παριστάνει συνάρτηση, αφού κάθε στοιχείο του Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του Β.**

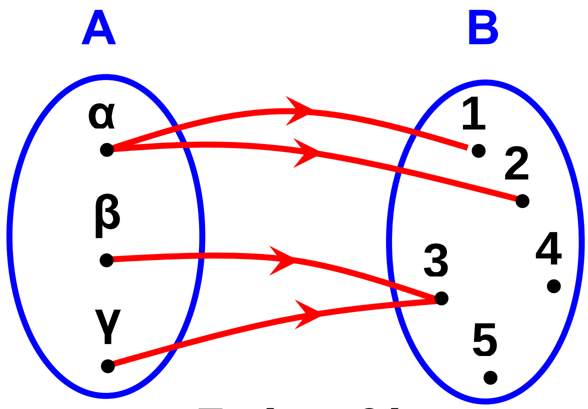
✓ **Το σχήμα (β) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.**

✓ **Το σχήμα (γ) δεν παριστάνει συνάρτηση, αφού το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β.**

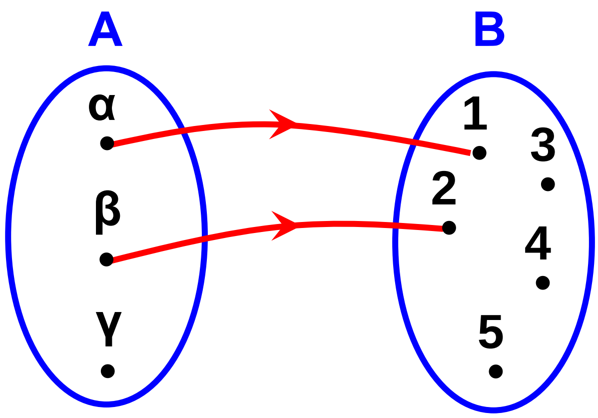
✓ **Το σχήμα (δ) δεν παριστάνει συνάρτηση. Πρώτον διότι το $\gamma \in A$ δεν αντιστοιχίζεται σε κανένα στοιχείο του Β και δεύτερον διότι το $\alpha \in A$ αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του Β.**



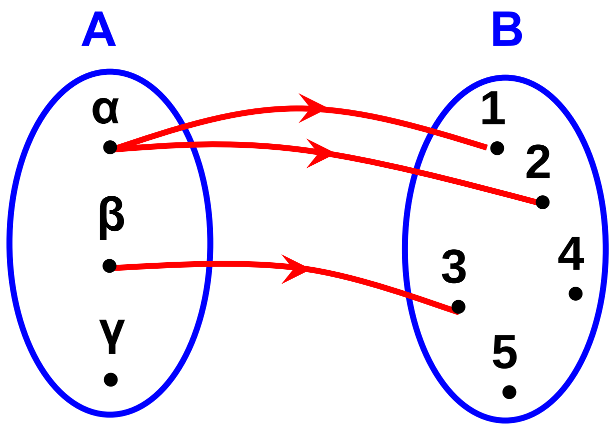
Σχήμα α΄



Σχήμα β΄



Σχήμα γ΄



Σχήμα δ΄

Συντομογραφία συνάρτησης

Είδαμε παραπάνω ότι, για να οριστεί μια συνάρτηση *f*, πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

- **Το πεδίο ορισμού της A**
- **Το σύνολο B και**
- **Το *f*(x) για κάθε $x \in A$**

Οι συναρτήσεις, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο βιβλίο αυτό, είναι της μορφής $f : A \to B$, όπου $A \subseteq R$ και $B \subseteq R$, είναι δηλαδή, όπως λέμε, πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.

Πολλές φορές αναφερόμαστε σε μια συνάρτηση *f* δίνοντας μόνον τον τύπο με τον οποίο εκφράζεται το *f*(x) . Λέμε π.χ. δίνεται «η συνάρτηση *f*,

με « $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, πιο σύντομα, «η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ » ή, ακόμα, «η συνάρτηση $y = \sqrt{1 - 4x}$ ».

Σε μια τέτοια περίπτωση θα θεωρούμε **συμβατικά** ότι:

- Το πεδίο ορισμού A της f είναι το «ευρύτερο» από τα υποσύνολα του R στα οποία το $f(x)$ έχει νόημα.
- Το σύνολο B είναι ολόκληρο το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

Έτσι για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - 4x}$ το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$, αφού πρέπει $1 - 4x \geq 0$, ενώ το σύνολο B είναι όλο το R .

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Πολλές φορές μια συνάρτηση περιγράφεται με έναν τύπο που έχει κλάδους, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{αν } x < 0 \\ x - 1, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

Για να υπολογίσουμε τις τιμές της f στα σημεία -1, 0 και 1 εργαζόμαστε ως εξής:

✓ Για $x = -1 < 0$, από τον κλάδο $f(x) = x^2 + 1$, έχουμε:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

✓ Για $x = 0$, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(0) = 0 - 1 = -1.$$

✓ Τέλος, για $x = 1 \geq 0$, από τον κλάδο $f(x) = x - 1$, έχουμε:

$$f(1) = 1 - 1 = 0.$$

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και, γενικά, χρησιμοποιούμε το γράμμα f για τα συμβολισμό μιας συνάρτησης και το γράμμα x για το συμβολισμό του τυχαίου στοιχείου του πεδίου ορισμού της, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα.

Έτσι για παράδειγμα οι

$$f(x) = x^2 - 4x + 7,\ g(t) = t^2 - 4t + 7 \text{ και } h(s) = s^2 - 4s + 7$$

ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Επομένως το x στον τύπο μιας συνάρτησης θα παίζει το ρόλο μιας «άδειας θέσης». Με αυτό το σκεπτικό, η παραπάνω συνάρτηση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$f(\ \ ) = (\ \ )^2 - 4(\ \ ) + 7,$$

όπου οι παρενθέσεις έχουν πάρει τη θέση ενός γράμματος.

Έτσι για να υπολογίσουμε το $f(-2)$ απλά τοποθετούμε το -2 στις θέσεις, που ορίζουν οι παρενθέσεις:

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^2 - 4(-2) + 7 \\ &= 4 + 8 + 7 = 19 \end{aligned}$$

Ομοίως, έχουμε

$$\begin{aligned} f(3x) &= (3x)^2 - 4(3x) + 7 \\ &= 9x^2 - 12x + 7 \end{aligned}$$

Υπάρχει όμως και μια παραπέρα απλοποίηση των εκφράσεών μας που σχετίζονται με συναρτήσεις.

Πολλές φορές αντί να λέμε «η συνάρτηση $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$», θα λέμε «η συνάρτηση $s = \frac{1}{2}gt^2$», δηλαδή γράφουμε s υπονοώντας το s(t). Αυτή η απλοποίηση γίνεται συχνότατα σε διάφορες επιστήμες, που χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα μαθηματικά εργαλεία, όπως η φυσική, η χημεία κτλ. Συνήθως στις περιπτώσεις αυτές υπάρχει κάποιο πείραμα, όπου το t είναι η

τιμή ενός μεγέθους, που υπεισέρχεται στο πείραμα, και το s(t) η αντίστοιχη τιμή κάποιου άλλου μεγέθους.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{x - 2} + \sqrt{x - 1}$$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνα μόνο τα x για τα οποία ισχύει

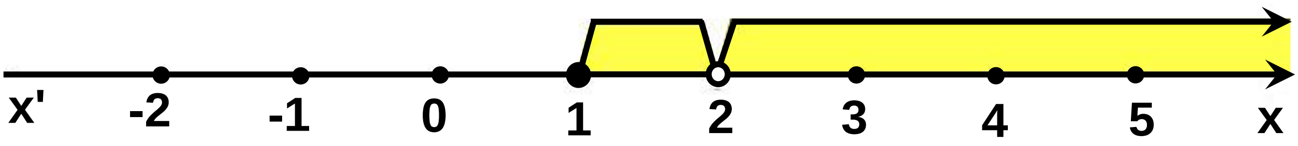
$$x - 2 \neq 0 \text{ και } x - 1 \geq 0$$

ή, ισοδύναμα, για

$$x \neq 2 \text{ και } x \geq 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = [1,2) \cup (2, +\infty) \text{ (Σχήμα)}$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \dfrac{4}{x - 1} + 5$ ii) $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ iv) $f(x) = \dfrac{1}{|x| + x}$

2. **Ομοίως των συναρτήσεων:**

i) $f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - x}$ **ii)** $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

iii) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$ **iv)** $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$

3. **Δίνεται η συνάρτηση**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ , αν } x < 0 \\ 2x + 3 \text{ , αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $f(-5)$, $f(0)$ και f (6).

4. **Μια συνάρτηση f ορίζεται ως εξής:**
"Σκέψου έναν φυσικό αριθμό, πρόσθεσε σ' αυτόν το 1, πολλαπλασίασε το άθροισμα με 4 και στο γινόμενο πρόσθεσε το τετράγωνο του αριθμού".

i) **Να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια τις τιμές της για $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ και $x = 3$. Τι παρατηρείτε;**

ii) **Να βρείτε τους φυσικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει**

$f(x) = 36$, $f(x) = 49$, $f(x) = 100$ **και** $f(x) = 144$.

5. **Δίνονται οι συναρτήσεις:**

i) $f(x) = \dfrac{4}{x - 1} + 5$, **ii)** $g(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$ **και** **iii)** $h(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

i) $f(x) = 7$ **ii)** $g(x) = 2$ **και** **iii)** $h(x) = \dfrac{1}{5}$.

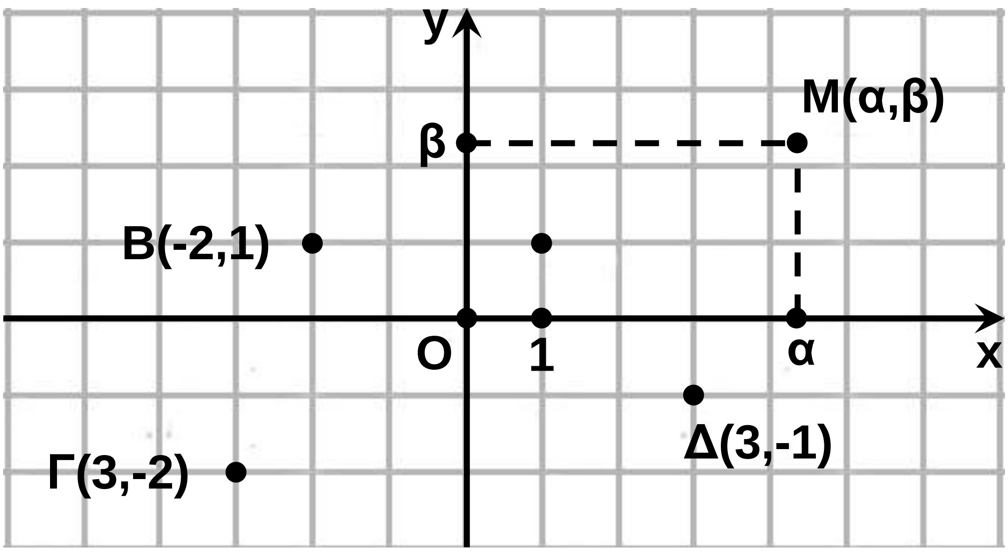
4.2 ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Καρτεσιανές συντεταγμένες

Η παράσταση ενός σημείου του επιπέδου με ένα διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών, βοήθησε στην επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων με αλγεβρικές μεθόδους. Η παράσταση αυτή, όπως μάθαμε σε προηγούμενες τάξεις, γίνεται ως εξής:

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x'x και y'y με κοινή αρχή ένα σημείο Ο. Από αυτούς ο οριζόντιος x'x λέγεται **άξονας των τετμημένων** ή άξονας των x, ενώ ο κατακόρυφος y'y **άξονας των τεταγμένων** ή **άξονας των y.**

Όπως είναι γνωστό, σε κάθε σημείο Μ του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντιστρόφως, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο Μ του επιπέδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



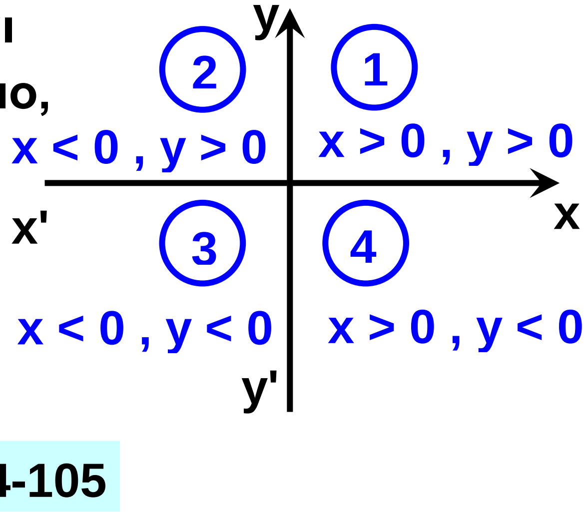
Οι αριθμοί α, β λέγονται συντεταγμένες του Μ. Ειδικότερα ο α λέγεται τετμημένη και ο β τεταγμένη του σημείου Μ. Το σημείο Μ που έχει συντεταγμένες α και β συμβολίζεται με Μ(α, β) ή, απλά, με (α, β).

Επειδή η ιδέα της χρησιμοποίησης ζευγών για την παράσταση σημείων του επιπέδου ανήκει στον Καρτέσιο, το παραπάνω ζεύγος των αξόνων το λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και το συμβολίζουμε Oxy , ενώ το επίπεδο στο οποίο ορίστηκε το σύστημα αυτό το λέμε καρτεσιανό επίπεδο. Αν επιπλέον οι μονάδες των αξόνων έχουν το ίδιο μήκος, το σύστημα Oxy λέγεται ορθοκανονικό.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ:
Στα επόμενα, εκτός αν αναφέρεται διαφορετικά, όταν λέμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, θα εννοούμε ορθοκανονικό καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

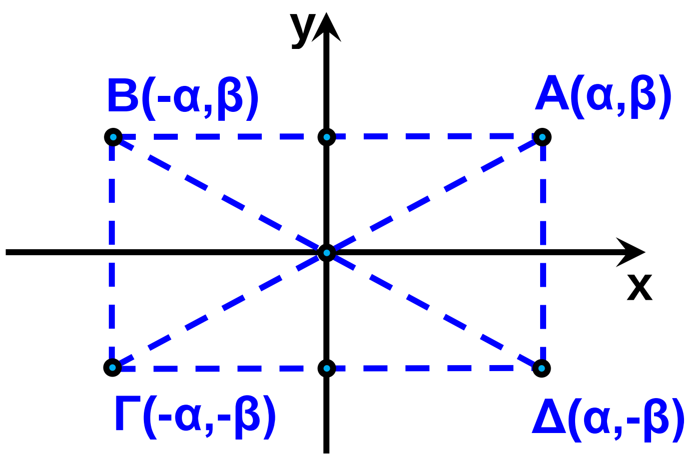
Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σύστημα Oxy συντεταγμένων στο επίπεδο. Τότε:

- **Τα σημεία του άξονα x'x και μόνο αυτά έχουν τεταγμένη ίση με το μηδέν, ενώ τα σημεία του άξονα y'y και μόνο αυτά έχουν τετμημένη ίση με το μηδέν**
- **Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια, που είναι τα εσωτερικά των γωνιών $x\hat{O}y$, $y\hat{O}x'$, $x'\hat{O}y'$ και $y'\hat{O}x$ και ονομάζεται 1^o, 2^o, 3^o και 4^o, τεταρτημόριο, αντιστοίχως. Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο διπλανό σχήμα.**

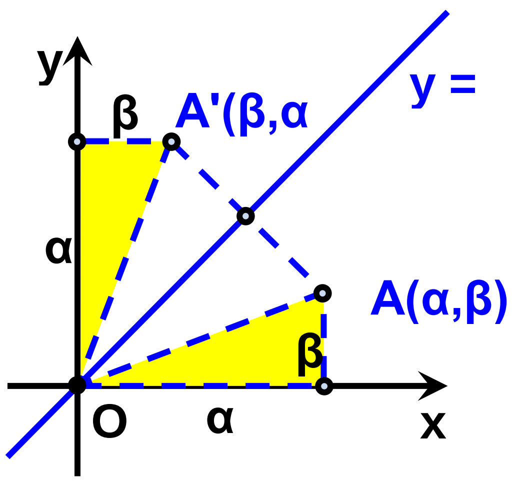


• Αν Α (α, β) είναι ένα σημείο του καρτεσιανού επιπέδου, με τη βοήθεια της συμμετρίας ως προς άξονα και ως προς κέντρο, διαπιστώνουμε ότι:

✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα x'x είναι το σημείο Δ (α,-β), που έχει ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη (Σχ. α').
✓ Το συμμετρικό του ως προς τον άξονα y'y είναι το σημείο Β(-α,β), που έχει ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη (Σχ. α').
✓ Το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Γ (-α,-β), που έχει αντίθετες συντεταγμένες (Σχ. α').
✓ Το συμμετρικό του ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων είναι το σημείο Α'(β,α) που έχει τετμημένη την τεταγμένη του Α και τεταγμένη την τετμημένη του Α (Σχ. β').



Σχήμα α'



Σχήμα β'

Απόσταση σημείων

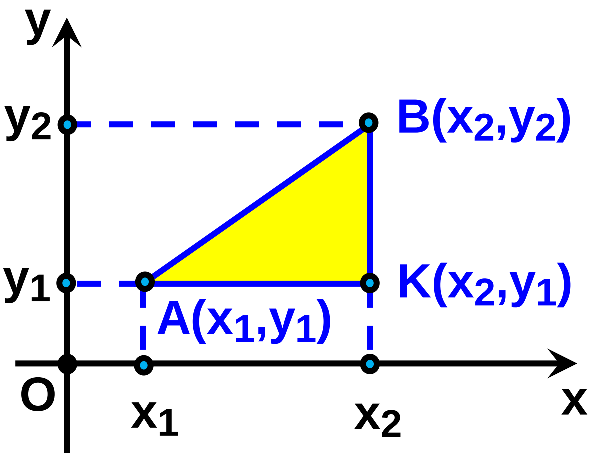
Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού. Θα δείξουμε ότι οι απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΑΒ του παρακάτω σχήματος έχουμε:

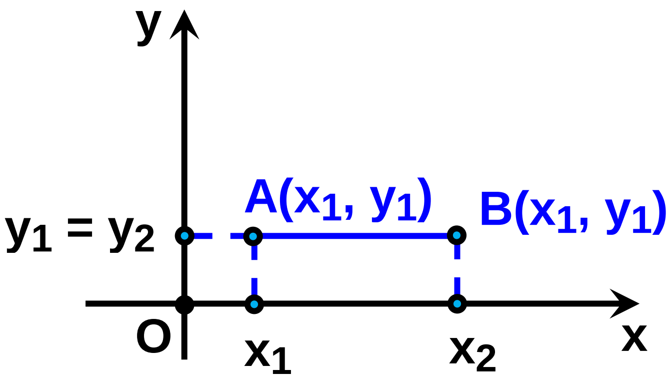
$$(AB)^2 = (KA)^2 + (KB)^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$
$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$



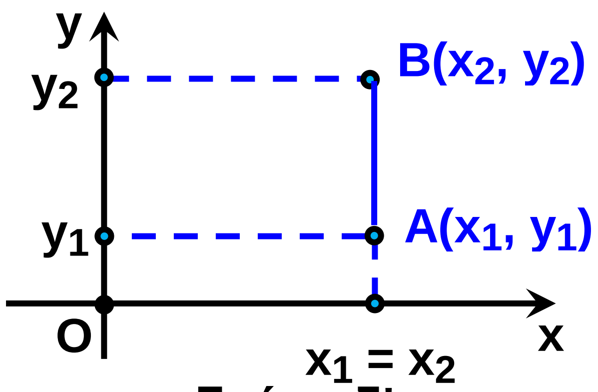
οπότε:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει και στην περίπτωση που η ΑΒ είναι παράλληλη με τον άξονα x'x (Σχήμα γ') ή παράλληλη με τον άξονα y'y (Σχήμα δ').



Σχήμα γ'



Σχήμα δ'

Για παράδειγμα, αν Α(3,1), Β(3,5) και Γ (-1,1) είναι οι κορυφές ενός τριγώνου ΑΒΓ, τότε θα είναι:

$$(AB) = \sqrt{(3 - 3)^2 + (5 - 1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

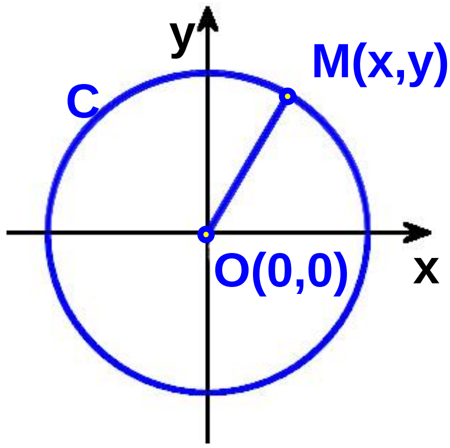
$$(A\Gamma) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{4^2} = 4$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-1 - 3)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

Αφού, λοιπόν, είναι (ΑΒ) = (ΑΓ), το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και επειδή επιπλέον ισχύει $(AB)^2 + (A\Gamma)^2 = 32 = (B\Gamma)^2$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ορθογώνιο .

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω C ο κύκλος με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα ρ. Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο Μ (x, y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει $x^2 + y^2 = \rho^2$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι προφανές ότι ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει στον κύκλο C, αν και μόνο αν ισχύει (ΟΜ) = ρ . Όμως $(OM) = \sqrt{x^2 + y^2}$, οπότε έχουμε:

$$(OM) = \rho \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \rho \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \rho^2$$

Επομένως το σημείο Μ (x,y) ανήκει στο κύκλο C (Ο,ρ), αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση

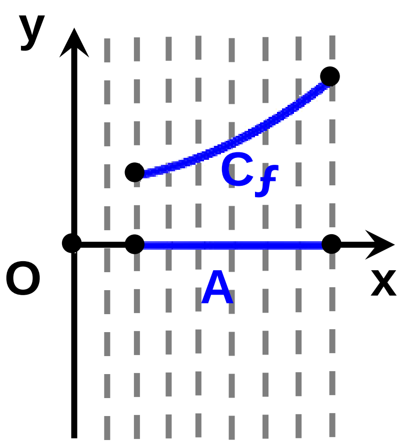
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1), που ικανοποιείται από τις συντεταγμένες των σημείων του κύκλου C (Ο, ρ) και μόνο από αυτές, λέγεται **εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ.** Για παράδειγμα, η εξίσωση του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ρ = 1 είναι η $x^2 + y^2 = 1$. Ο κύκλος αυτός λέγεται και **μοναδιαίος κύκλος.**

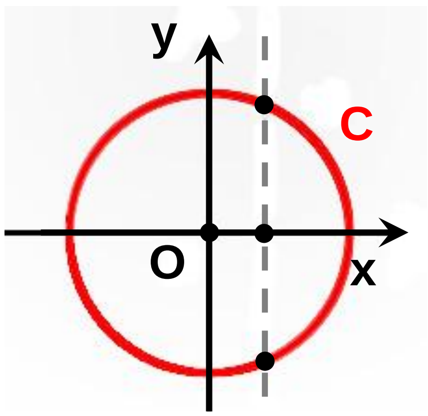
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Οxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο. Το σύνολο των σημείων Μ (x, y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων Μ (x, f(x)), $x \in A$, λέγεται **γραφική παράσταση** της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f . Η εξίσωση, λοιπόν, $y = f(x)$ επαληθεύεται από τα σημεία της C_f και μόνο από αυτά. Επομένως, η $y = f(x)$ είναι η εξίσωση της γραφικής παράστασης της f. Για το λόγο αυτό, τη γραφική παράσταση C_f της f τη συμβολίζουμε, πολλές φορές, απλά με την εξίσωσή της, δηλαδή με $y = f(x)$.

Επειδή κάθε $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο $y \in \mathbb{R}$, δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τετμημένη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει με τη γραφική παράσταση της f το πολύ ένα κοινό σημείο (Σχ. α'). Έτσι, ο κύκλος δεν αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης (Σχ. β').

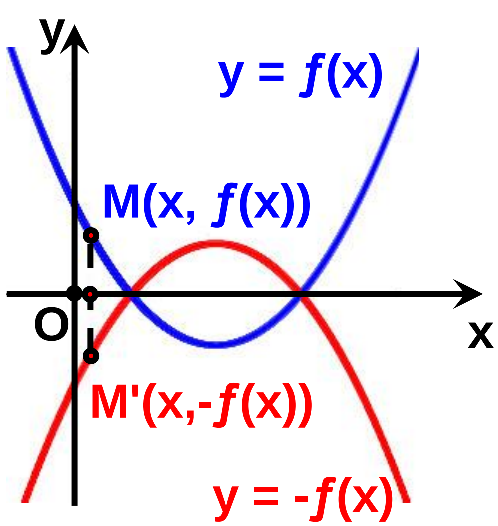


Σχήμα α'

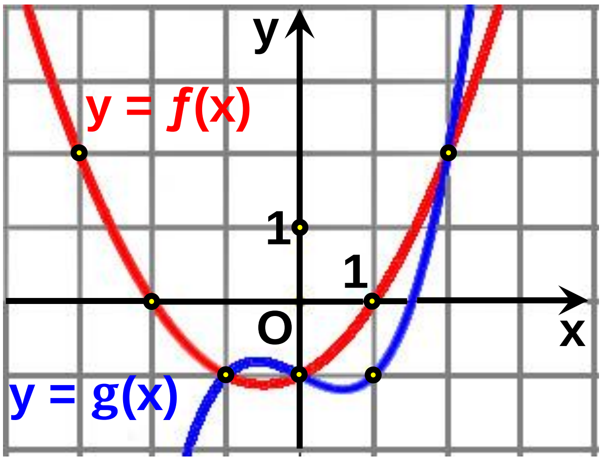


Σχήμα β'

Όταν δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f μπορούμε, επίσης, να σχεδιάσουμε και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$, παίρνοντας τη συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$ και τούτο διότι η γραφική παράστασης της $-f$ αποτελείται από τα σημεία $M'(x,-f(x))$ που είναι συμμετρικά των σημείων $M(x, f(x))$ της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $x'x$.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ



Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f και g, που είναι ορισμένες σε όλο το R.

i) Να βρείτε τις τιμές της f στα σημεία: 3, -2, -1, 0, 1 και 2

ii) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$f(x) = 0,\ f(x) = 2\ \ \&\ \ f(x) = g(x).$$

iii)Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$f(x) > 0 \text{ και } f(x) > g(x).$$

ΛΥΣΗ

i) Είναι:

$f(-3) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(-1) = -1$, $f(0) = -1$, $f(1) = 0$ και $f(2) = 2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και του άξονα x'x, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -2$ και $x_2 = 1$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που έχουν τεταγμένη 2, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -3$ και $x_2 = 2$.

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, δηλαδή οι αριθμοί $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ και $x_3 = 2$.

iii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x, δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > g(x)$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , δηλαδή όλα τα $x \in (-\infty, -1) \cup (0,2)$.

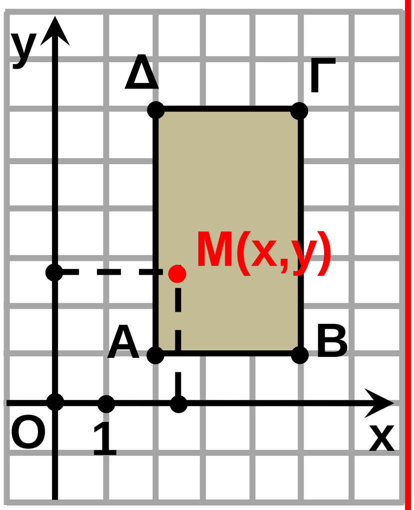
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>Α΄ ΟΜΑΔΑΣ</u>

1. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

Α(-1,2), Β(3,4), Ο(0,0), Γ(3,0), Δ(0,-5) και Ε(-2,-3).

2. Ένα σημείο Μ (x,y) κινείται μέσα στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y ;



3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α (-1,3),

i) ως προς τον άξονα x' x

ii) ως προς τον άξονα y' y

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$

iv) ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

i) Ο(0,0) και Α(4, -2), ii) Α(-1,1) και Β(3,4),

iii) Α(-3,-1) και Β(1,-1), iv) Α(1,-1) και Β(1,4).

5. Να αποδείξετε ότι:

i) Τα σημεία Α(1,2), Β(4,-2) και Γ(-3,5) είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.

ii) Τα σημεία Α(1,-1), Β(-1,1) και Γ(4,2) είναι κορυφές ορθογωνίου τριγώνου.

6. Να σχεδιάσετε το πολύγωνο με κορυφές τα σημεία: Α(2,5), Β(5,1) , Γ(2,-3) , Δ(-1,1) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτό είναι ρόμβος.

7. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε την τιμή του k για την οποία το σημείο Μ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

i) $f(x) = x^2 + k$, Μ (2,6)

ii) $g(x) = kx^3$, Μ (-2,8)

iii) $h(x) = k\sqrt{x + 1}$, Μ(3,8).

8. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες.

i) $f(x) = x - 4$ ii) $g(x) = (x - 2)(x - 3)$

iii) $h(x) = (x - 1)^2$ iv) $q(x) = x^2 + x + 1$

v) $\varphi(x) = x\sqrt{x - 1}$ vi) $\psi(x) = x\sqrt{x^2 - 4}$.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε:

i) Τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x'x .

10. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x^2 - 5x + 4$ και $g(x) = 2x - 6$. Να βρείτε:

i) Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

ii) Τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g .

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ